РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау

На правах рукописи

МАХЛИН Юрий Генрихович

Спиновая динамика и топология сверхтекучей ферми-жидкости

01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук, профессор В.П. Минеев

Москва — 1995

Оглавление

Введение **3**

1. Прецессирующие структуры и сверхтекучий спиновый ток в электрическом поле **8**

1.1. Фазовая диаграмма 8
1.2. Уравнения Леггетта 12
1.3. Низкочастотная динамика в ^{3}He-B на фоне однородной прецессии 16
1.4. Градиентная энергия и спиновый ток в электрическом поле 18
1.4.1. Вывод выражения для спинового тока 20
1.4.2. Учет ферми-жидкостного взаимодействия 24
1.4.3. Градиентная энергия 25
1.5. Спин-орбитальное взаимодействие и калибровочная инвариантность 27
1.6. Электрическое поле и протекание спинового тока 29
1.7. Сверхтекучий спиновый ток и гидродинамические моды в ^{3}He-A_1 в электрическом поле 31
1.7.1. Спиновый ток в A_1-фазе в электрическом поле . . . 31
1.7.2. Гидродинамические моды 33

2. Спиновая динамика сверхтекучей ферми-жидкости в неоднородных внешних условиях **39**

2.1. Когерентно прецессирующие структуры в сверхтекучем и нормальном ^{3}He 39
2.2. Вывод основных уравнений 43
2.3. Уравнения вблизи перехода в нормальную фазу 53
2.4. Гамильтонов формализм и уравнения спиновой динамики . 54
2.5. Двухдоменная структура вблизи перехода 56
2.6. Релаксация двухдоменной структуры 62
2.7. Образование двухдоменной структуры. Конкуренция спиновых токов 65

Приложение А 66
Приложение Б 69
Приложение В 70

3. Топология пересечения вихревой решетки с плоским солитоном **72**
3.1. Гомотопическая классификация дефектов 73
3.2. Пересечение линейного и плоского солитонов 80
3.2.1. Малые угловые скорости 85
3.2.2. Промежуточные угловые скорости 86
3.2.3. Большие угловые скорости 88

Заключение **91**

Литература **93**

Введение

После открытия сверхтекучести ^{4}He [1] и создания Ландау теории сверхтекучести для бозе-жидкости, а затем теории сверхтекучести и сверхпроводимости ферми-систем [2], ожидалось, что другой изотоп гелия ^{3}He при достаточно низких температурах также должен становиться сверхтекучим. Поиски свертекучего перехода в ^{3}He начались после того, как Л.П. Питаевским было показано [3], что из-за сильного отталкивания атомов гелия на близких расстояниях и ван-дерваальсовского притяжения на больших расстояниях спаривание атомов в ^{3}He должно происходить в состоянии с относительным моментом импульса куперовских пар $L \neq 0$.

Открытие сверхтекучести ^{3}He в 1971г. [4] привело к возникновению новой области теоретических и экспериментальных исследований. Спаривание в ^{3}He происходит в p-состоянии (с относительным моментом импульса куперовских пар $L = 1$) в орбитальном пространстве и в триплетном состоянии в спиновом пространстве (спин пары $S = 1$). Параметр порядка в сверхтекучих фазах задается комплексной матрицей 3×3, т.е. восемнадцатью вещественными параметрами, и обладает сложной орбитальной и спиновой структурой.

Следствием нетривиальности спиновой структуры являются необычные магнитные свойства сверхтекучих фаз ^{3}He. Нормальный ^{3}He, помещенный в постоянное магнитное поле H и перпендикулярное ему переменное магнитное поле (непрерывный ядерный магнитный резонанс), поглощает энергию на ларморовской частоте $\omega_L = \gamma H$ (γ — гиромагнитное отношение). В сверхтекучих фазах эта частота смещается, а кроме того, появляется резонансное поглощение в переменном поле, параллельном H. Смещение резонансных частот зависит от фазы, и эксперименты по ядерному магнитному резонансу (ЯМР) явились одним из решаюших аргументов в вопросе идентификации различных фаз.

В 80-е годы при исследовании B-фазы ^{3}He методом ядерного магнитного резонанса были обнаружены новые структуры, так называемые магнитно сверхтекучие фазы. Если приложить к сосуду с фермижидкостью, находящемуся в магнитном поле, кратковременный импульс поперечного поля (импульсный ЯМР), то спин отклонится от своего равновесного значения на некоторый угол, определяющийся продолжительностью импульса, после чего начнет прецессировать вокруг направления постоянного поля (которое мы в дальнейшем будем считать параллельным оси $\hat{z}$). Наблюдаемый сигнал индукции, наводимый в измерительной катушке, пропорционален полной поперечной составляющей спина в сосуде. Если магнитное поле неоднородно (его градиент также будем считать направленным вдоль $\hat{z}$), то со временем, казалось бы, будет нарастать разность фаз между горизонтальными составляющими спина в разных точках пространства. Когда разность фаз на концах сосуда достигнет величины 2π, полная горизонтальная составляющая, определяемая интегралом $\int dz \mathbf{S}_{\perp z}$, обратится в ноль, а вместе с ней и сигнал индукции. Затем сигнал снова будет нарастать, но уже до меньшего значения, и т.д.

Однако в B-фазе сверхтекучего ^{3}He наблюдается [5] иное поведение сигнала индукции: он спадает со временем практически монотонно, и его время жизни значительно превышает величину, определяемую расфазировкой из-за неоднородности поля

$$t_{расфазировки} = \frac{2\pi}{\Delta\omega_L}, \tag{0.1}$$

где $\Delta\omega_L$ — разность ларморовских частот на концах сосуда.

Это явление получило теоретическое объяснение в работах И.А. Фомина [6], который показал, что после отклоняющего импульса объем сосуда разбивается на два домена, в одном из которых намагниченность (спин) имеет равновесное направление вдоль поля, а в другом отклонена от этого направления на угол $\theta_L = \arccos(-1/4) \approx 104^\circ$ и вращается вокруг направления поля с частотой и фазой, одинаковыми вдоль всего домена, несмотря на неоднородность внешнего поля. Пространственное изменение ларморовской частоты компенсируется при этом дипольным моментом и спиновым током.

Этот домен получил название однородно прецессирующего (ОПД или, по-английски, HPD). Когерентная прецессия намагниченности даже в неоднородном магнитном поле является важнейшим свойством магнитно сверхтекучих систем. Это явление аналогично фазовой когерентности в обычных сверхпроводниках и сверхтекучих жидкостях. Если рассматривать горизонтальную составляющую спина как параметр порядка (с соответствующей амплитудой и фазой), то по отношению к такому параметру порядка домен с равновесным значением спина является нормальной фазой, а ОПД — сверхтекучей [7]. Благодаря градиентной энергии ^{3}He имеется жесткость по отношению к пространственному изменению фазы такого параметра порядка, и градиенты фазы приводят к протеканию сверхтекучего спинового тока.

Для новой "магнитно сверхтекучей" фазы были предсказаны теоретически и наблюдались в экспериментах многие спиновые аналоги явлений в сверхпроводниках: образование спиновых вихрей [8], эффект Джозефсона на спиновом токе, проскальзывание фазы при протеканиии спинового тока между двумя сосудами [9, 10, 8].

Для наблюдения эффектов, связанных с протеканием спинового тока, на концах канала, соединяющего два сосуда с ОПД, при помощи ЯМР-катушек создается разность фаз прецессии, которая приводит к протеканию спинового тока. В работе [11] авторы предположили возможность влияния электрического поля на протекание спинового тока вдоль канала. Была высказана гипотеза, что вклад электрического поля $\mathbf{E}$ в спиновый ток описывается формулой вида

$$\mathbf{j}_z \sim \left(\nabla\alpha - 2\frac{\vec{\mu} \times \mathbf{E}}{\hbar c} \right), \tag{0.2}$$

где $\mathbf{j}_z$ — ток z-компоненты спина вдоль канала, α — угол прецессии в ЯМР-экспериментах, $\vec{\mu}$ — магнитный момент ядер гелия, ориентированный вдоль оси z. Оценка величины эффекта [11] показывает, что соответствующая разность фаз прецессии в двух сосудах, вызываемая включением электрического поля, может быть измерена.

В части 1 диссертации приведены краткие сведения о сверхтекучих фазах ^{3}He и их спиновой динамике (разделы 1.1–1.3), а затем изучается влияние электрического поля на протекание спинового тока. Оказывается, что причиной эффекта является спин-орбитальное взаимодействие магнитных моментов движущихся ядер ^{3}He с внешним электрическим полем $(\vec{\mu} \times \mathbf{p})\mathbf{E}/mc$. Приводится микроскопический вывод выражений для спинового тока и свободной энергии в электрическом поле (раздел 1.4), основанный на градиентном разложении уравнений Горькова, написанных с учетом спин-орбитальных членов. При помощи этих выражений исследовано влияние электрического поля на протекание спинового тока между двумя сосудами с однородно прецессирующей намагниченностью (раздел 1.6).

Действие системы частиц со спином во внешнем электромагнитном поле инвариантно относительно локальных спиновых поворотов, образующих группу SU(2) [12]. В работе (раздел 1.5) демонстрируется калибровочная инвариантность полученных выражений, выводится калибровочно-инвариантная форма ферми-жидкостного взаимодействия, а также формулы для действия ковариантной производной на параметр порядка.

В A_1-фазе ^{3}He конденсат имеет определенное значение проекции спина на направление внешнего магнитного поля, поэтому возникновение сверхтекучего спинового тока означает одновременное возникновение массового тока. На основе исследования линейных гидродинамических уравнений с учетом спин-орбитального взаимодействия в разделе 1.7 диссертации изучается возможность возбуждения волн второго звука переменным электрическим полем.

Недавно были открыты когерентно прецессирующие спиновые структуры в нормальной [13] и сверхтекучей [14, 15] ферми-жидкости в бесстолкновительной области. Теоретические исследования в *нормальной* ферми-жидкости опираются на уравнения, выведенные Леггеттом [16]. В сверхтекучей жидкости в *гидродинамической* области используются уравнения Леггетта [17], обобщающиеся на пространственно-неоднородный случай, а в бесстолкновительном режиме в *однородном* случае — уравнения Леггетта-Такаги [18]. Однако оставался неисследованным вопрос об уравнениях спиновой динамики сверхтекучей ферми-жидкости в неоднородных внешних условиях за пределами гидродинамического приближения. Во второй части диссертации приведен вывод этих уравнений (раздел 2.2), которые могут быть использованы во всем интервале температур. Путем выделения наиболее существенных членов вблизи температуры перехода получены приближенные уравнения (раздел 2.3), а затем найдено решение этих уравнений, описывающее когерентно прецессирующую спиновую структуру (раздел 2.5). Исследуется характер релаксации (раздел 2.6) и область существования (раздел 2.7) структуры. Кроме того, показано, что уравнения спиновой динамики нормальной жидкости являются гамильтоновыми, и предложен вывод приближенных уравнений вблизи T_c на основе гамильтонова формализма (раздел 2.4).

При исследовании сверхтекучих фаз часто приходится изучать особенности в распределении параметра порядка. Точное описание таких особенностей обычно затруднено, и представляет интерес вопрос об их возможных типах. При исследовании дефектов в последнее время широко используются методы гомотопической топологии [19]. При этом при классификации дефектов вместо сложных распределений параметра порядка приходится изучать топологические свойства пространства вырождения.

Методы теории гомотопий позволяют классифицировать особенности различной размерности: нульмерные (локализованные в пространстве), линейные или плоские (раздел 3.1). При пересечении двух дефектов может возникать особенность меньшей размерности, топология которой тесно связана с топологией породивших ее дефектов. В третьей части исследуется этот вопрос в связи с экспериментами [20], проводившимися во вращающемся криостате с ^{3}He-A, где была создана структура из решетки вихрей и перпендикулярного им плоского солитона. Классификация возможных топологических типов распределения параметра порядка в области пресечения зависит от угловой скорости вращения сосуда. В разделе 3.2 приведены результаты для малых, средних и больших угловых скоростей. Для всех топологических инвариантов выведены аналитические выражения.

Часть 1.

Прецессирующие структуры и сверхтекучий спиновый ток в электрическом поле

В разделах 1.1–1.3 этой части мы приведем краткие сведения о сверхтекучих фазах ^{3}He и их спиновой динамике. В этих и дальнейших разделах будут использоваться общие сведения из обзорной статьи [21], а также из монографии [22].

В последующих разделах исследуется спиновая динамика ^{3}He в электрическом поле. Соответствующие результаты опубликованы в работах [23], [24].

Во всей работе мы измеряем температуру в энергетических единицах: $k_B = 1$.

1.1. Фазовая диаграмма

^{3}He становится сверхтекучим при температурах в милликельвиновом диапазоне. Фазовая диаграмма ^{3}He в нулевом магнитном поле изображена на рис.1.1. При давлениях ниже давления в поликритической точке P ($P_c = 21.22$ бар) при понижении температуры происходит переход второго рода в сверхтекучую фазу, получившую название B-фазы, и гелий продолжает существовать в этом состоянии до нуля тумпературы. При давлениях, превышающих P_c, но меньших давления $P = 34.4$ бар, при котором гелий становится твердым (это давление очень слабо зависит от температуры в области существования сверхтекучих фаз), при движении вниз по температуре сначала происходит фазовый переход второго рода в A-фазу сверхтекучего ^{3}He, а при меньшей температуре

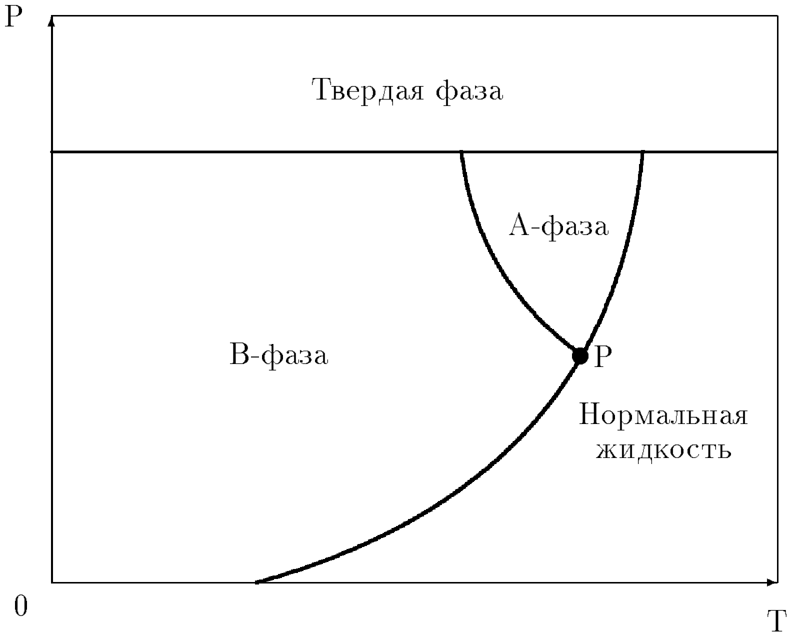


Рис. 1.1. Фазовая диаграмма ^{3}He в области существования сверхтекучих фаз в нулевом магнитном поле.

— переход первого рода в B-фазу. Температура сверхтекучего перехода меняется от 0.93 мК при нулевом давлении до 2.5 мК на кривой плавления; в поликритической точке $T_c = 2.273$ мК (экспериментальные данные приведены по работе [25]).

Приложение магнитного поля качественно меняет вид фазовой диаграммы (рис.1.2). Во-первых, во всей области давлений появляется новая фаза, называемая A_1-фазой. Переход из нормальной фазы в A_1-фазу является фазовым переходом второго рода. Эта фаза стабильна в узкой области температур вблизи T_c (согласно [26] ширина области существования A_1-фазы на кривой плавления пропорциональна магнитному полю с коэффициентом пропорциональности 6.11 мкК/кГ на кривой плавления).

Во-вторых, A-фаза существует теперь при всех давлениях (ниже кривой плавления) и в более широком интервале температур, чем в нулевом поле. В достаточно сильных магнитных полях (порядка нескольких килогаусс) она становится стабильной вплоть до абсолютного нуля (по крайней мере, для экспериментально достижимых температур; см. более полную фазовую диаграмму, например, в книге [22, Глава 4]). Параметр порядка A-фазы деформируется магнитным полем, и A-фазу в магнитном поле иногда называют A_2-фазой. Аналогично, B-фазу в магнитном поле называют B_2-фазой. Таким образом, в объеме ^{3}He наблюдаются

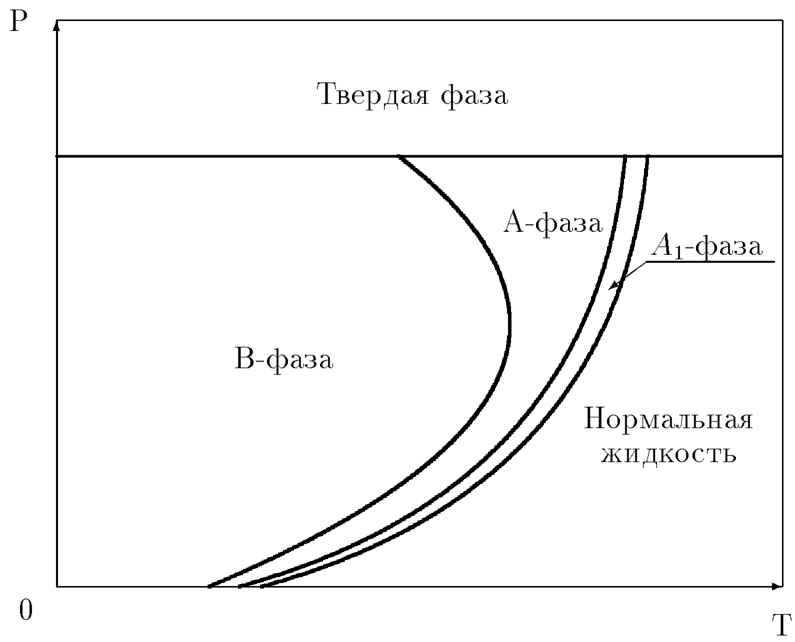


Рис. 1.2. Фазовая диаграмма ^{3}He в магнитном поле.

три стабильных фазы: A, B и A_1.

В настоящее время общепризнано, что спаривание в сверхтекучих фазах ^{3}He происходит в состоянии с орбитальным моментом пары $L = 1$ и спином $S = 1$ (триплетное p-спаривание). Параметр порядка описывается матрицей 2×2

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \langle a_{k\alpha} a_{k\beta} \rangle \,, \tag{1.1}$$

которая линейна по $\mathbf{k}$ и симметрична по спинорным индексам. Поэтому параметр порядка можно представить в виде

$$\hat{\Delta}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = (\mathbf{d}(\mathbf{k}, \mathbf{r})\vec{\sigma})\,\hat{g}, \tag{1.2}$$

где

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

— матрицы Паули, а

$$\hat{g} = i\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Спиновый вектор $\mathbf{d}$ при этом является линейной функцией импульса:

$$d_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = A_{\alpha i}(\mathbf{r})\hat{\mathbf{k}}_i \tag{1.5}$$

(как обычно, мы считаем, что импульс расположен вблизи Ферми-сферы). Таким образом, параметр порядка задается комплексной матрицей 3×3.

Значение матричных элементов $A_{\alpha i}$ определяется из уравнений теории сверхтекучести, которые представляют собой условие экстремальности свободной энергии:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial A_{\alpha i}} = 0. \tag{1.6}$$

Если пренебречь слабым диполь-дипольным взаимодействием (см. ниже), то свободная энергия системы инвариантна относительно спиновых и орбитальных вращений и градиентных преобразований (фазовых вращений). Поэтому разложение энергии по степеням $A_{\alpha i}$ с точностью до членов четвертого порядка имеет вид [27]

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -\alpha A_{\alpha i} A^*_{\alpha i} + \beta_1 |A_{\alpha i} A_{\alpha i}|^2 + \beta_2 \left(A_{\alpha i} A^*_{\alpha i}\right)^2 \\ &+ \quad \beta_3 A_{\alpha i} A_{\alpha j} A^*_{\beta i} A^*_{\beta j} + \beta_4 A_{\alpha i} A^*_{\alpha j} A_{\beta i} A^*_{\beta j} + \beta_5 A_{\alpha i} A^*_{\alpha j} A^*_{\beta i} A_{\beta j}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

В этой формуле α зависит от температуры и обращается в ноль в точке перехода. По порядку величины $\alpha \sim N_F(1 - T/T_c)$, где $N_F = p_F m^*/\pi^2\hbar^3$ — плотность состояний на уровне Ферми, p_F — фермиевский импульс, m^* — эффективная масса квазичастиц ^{3}He (фермиевская скорость связана с ними соотношением $v_F = p_F/m^*$). Коэффициенты β_i имеют одинаковый порядок величины $\beta_i \sim N_F T_c^{-2}$. Различным возможным фазам соответствуют минимумы свободной энергии. Эти минимумы вырождены относительно спиновых, орбитальных и фазовых вращений.

A-фаза описывается моделью Андерсона-Бринкмана-Морела (ABM). Эта модель была предложена Андерсоном и Морелом [28], а позже Андерсон и Бринкман [29] показали, что спиновые флуктуации могут привести к стабилизации этой фазы по отношению к B-фазе (которая в приближении БКШ является наиболее энергетически выгодной сверхтекучей фазой при всех температурах и давлениях). Параметр порядка в состоянии Андерсона-Бринкмана-Морела имеет вид (см. (1.5))

$$A_{\alpha i} = \Delta(T) d_\alpha \left(\Delta'_i + i\Delta''_i\right). \tag{1.8}$$

Здесь $\mathbf{d}$ — единичный спиновый вектор, а $\mathbf{\Delta}'$ и $\mathbf{\Delta}''$ — пара ортонормированных орбитальных векторов. Их векторное произведение $\mathbf{l} = \mathbf{\Delta}' \times \mathbf{\Delta}''$ задает направление оси орбитальной анизотропии A-фазы, вдоль которого направлен орбитальный момент куперовских пар. Квадрат модуля параметра порядка

$$\hat{\Delta}^+ \hat{\Delta} = A^*_{\alpha i} A_{\alpha j} \hat{k}_i \hat{k}_j = \Delta^2 \left(1 - (\hat{\mathbf{k}}\mathbf{l})^2\right) \tag{1.9}$$

зависит от направления и зануляется при $\mathbf{k} = \pm\mathbf{l}$.

В A_1-фазе параметр порядка имеет похожую структуру:

$$A_{\alpha i} = \frac{\Delta(T)}{2}\left(V'_\alpha + iV''_\alpha\right)\left(\Delta'_i + i\Delta''_i\right) \tag{1.10}$$

и соответствует спариванию частиц с определенным направлением спина (параллельным магнитному полю). Ось орбитальной анизотропии $\mathbf{l}$ определяется так же, как и в A-фазе, а ось квантования спина (ось спиновой анизотропии) задается равенством

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}' \times \mathbf{V}''. \tag{1.11}$$

Отметим, что векторы $\boldsymbol{\Delta}'$, $\boldsymbol{\Delta}''$, $\mathbf{V}'$, $\mathbf{V}''$ определяются значением параметра порядка неоднозначно: $A_{\alpha i}$ инвариантно относительно поворота векторов $\boldsymbol{\Delta}'$, $\boldsymbol{\Delta}''$ вокруг $\mathbf{l}$ и одновременного поворота $\mathbf{V}'$, $\mathbf{V}''$ вокруг $\mathbf{V}$ в противоположную сторону на тот же угол.

Параметр порядка B-фазы имеет вид

$$A_{\alpha i} = \Delta(T) R_{\alpha i} e^{i\phi}, \tag{1.12}$$

где $\hat{R}$ — ортогональная матрица, соответствующая вращению трехмерного спинового пространства относительно орбитального. Ее можно задавать направлением оси поворота $\mathbf{n}$ и углом поворота θ. Такое состояние обсуждалось в работах [30] и [31] и часто называется состоянием Бальяна-Вертхамера (BW). В этом состоянии модуль щели изотропен:

$$\hat{\Delta}^+\hat{\Delta} = \Delta^2. \tag{1.13}$$

1.2. Уравнения Леггетта

Спиновая динамика сверхтекучей ферми-жидкости в гидродинамической области ($\omega\tau \ll 1$, где ω — характерная частота, а τ — время релаксации) описывается уравнениями Леггетта, которые представляют собой уравнения эволюции спиновой плотности $\mathbf{S}$ и параметра порядка $\mathbf{d}$ (см. (1.2)):

$$\dot{\mathbf{S}} = \gamma \mathbf{S} \times \mathbf{H} + \mathbf{R}_D, \tag{1.14}$$

$$\dot{\mathbf{d}}(\mathbf{k}) = \mathbf{d}(\mathbf{k}) \times \gamma\left(\mathbf{H} - \frac{\gamma}{\chi}\mathbf{S}\right). \tag{1.15}$$

В этих уравнениях $\mathbf{H}$ — внешнее магнитное поле, $\mathbf{R}_D$ — момент дипольных сил, вызванный взаимодействием магнитных моментов атомов, составляющих куперовские пары, γ — гиромагнитное отношение для атомов гелия, а χ — магнитная восприимчивость.

Они были впервые выведены Леггеттом [17, 32] и являются гамильтоновыми. Феноменологический гамильтониан системы имеет вид

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\chi}\mathbf{S}^2 - \gamma\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}_0 + U_D(\mathbf{d}). \tag{1.16}$$

Первое слагаемое в этой формуле представляет собой внутреннюю магнитную энергию, обусловленную намагниченностью ядер ^{3}He, и соответствует отсутствию намагниченности в равновесии в нулевом внешнем поле. Коэффициент при этом члене можно определить из условия минимальности энергии в состоянии равновесия в магнитном поле, когда намагниченность равна $\gamma\mathbf{S} = \chi\mathbf{H}_0$ (в анизотропных фазах χ является тензором). Второй член — это зеемановская энергия, а последнее слагаемое есть энергия диполь-дипольного взаимодействия[1] магнитных моментов атомов ^{3}He, образующих куперовские пары:

$$U_D = \frac{3}{5}g_D(T)\left[A^*_{ii}A_{jj} + A^*_{ij}A_{ji} - \frac{2}{3}A^*_{ij}A_{ij}\right]\Big/\left(A^*_{\alpha k}A_{\alpha k}\right) \tag{1.17}$$

с температурно-зависимой константой $g_D(T)$. Диполь-дипольное взаимодействие имеется и в нормальной фазе, однако знак энергии зависит от случайного направления моментов атомов, и среднее ее значение равно нулю. В сверхтекучих фазах когерентность атомов, входящих в куперовские пары, приводит к конечному вкладу в дипольную энергию. Величина дипольной энергии мала по сравнению с энергией конденсации (1.7), поэтому дипольное взаимодействие не приводит к искажению формы параметра порядка, а только снимает вырождение минимумов (1.7).

В B-фазе дипольная энергия зависит только от угла поворота θ, задающего матрицу $\hat{R}(\mathbf{n},\theta)$ параметра порядка, и не зависит от направления оси поворота $\mathbf{n}$:

$$U_D = \frac{8}{5}g_D(T)\left(\frac{1}{4} + \cos\theta\right)^2. \tag{1.18}$$

Она достигает минимального значения при $\theta = \theta_L = \arccos(-1/4) \approx 104°$. В A-фазе дипольная энергия равна

$$U_D = -\frac{3}{5}g_D(T)\left(\mathbf{d}\cdot\mathbf{l}\right)^2 \tag{1.19}$$

[1]Это взаимодействие часто называют спин-орбитальным. В этой работе мы будем под спин-орбитальным подразумевать взаимодействие с внешним электрическим полем (см. раздел 1.4).

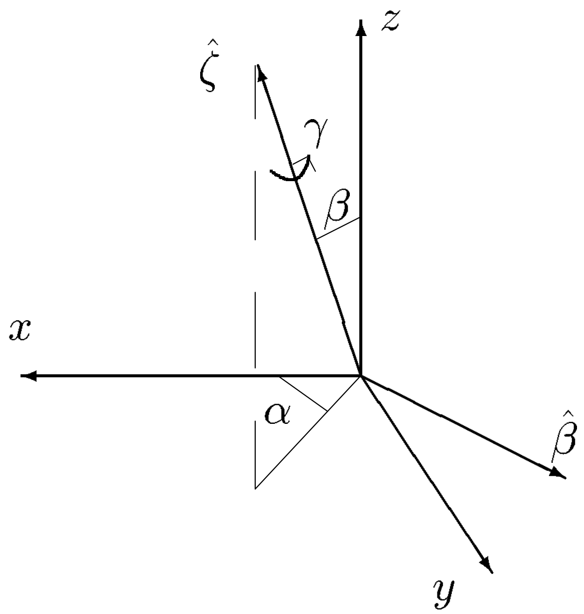


Рис. 1.3. Углы Эйлера, определяющие матрицу вращения $\hat{R}$ — параметр порядка B-фазы.

и минимальна, когда $\mathbf{d} = \pm\mathbf{l}$.

Временные производные спина и параметра порядка получаются коммутированием операторов, соответствующих этим величинам, с гамильтонианом. При этом используются коммутационные соотношения между компонентами спина и параметром порядка:

$$[S_\alpha, S_\beta] = i\hbar e_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma, \tag{1.20}$$

$$[S_\alpha, d_\beta(\mathbf{k})] = i\hbar e_{\alpha\beta\gamma} d_\gamma(\mathbf{k}). \tag{1.21}$$

Периодические решения уравнений Леггетта в B-фазе. Исследование уравнений Леггетта в B-фазе удобно производить, описывая параметр порядка углами Эйлера:

$$\hat{R} = \hat{R}_z(\alpha)\hat{R}_y(\beta)\hat{R}_z(\gamma), \tag{1.22}$$

а спин — проекциями S_z на ось $\hat{z}$, S_ζ на ось $\hat{\zeta} = \hat{R}\hat{z}$ и S_β на ось $\hat{\beta} = (\hat{z} \times \hat{\zeta})/|\hat{z} \times \hat{\zeta}|$ (рис.1.3).

При этом возникают пары канонически сопряженных переменных: α и S_z, β и S_β, γ и S_ζ. При заданных $\Phi = \alpha + \gamma$ и β дипольная энергия B-фазы

$$U_D = \frac{2}{5} g_D \left(\cos\beta + \cos\Phi + \cos\beta\cos\Phi - \frac{1}{2} \right)^2 \tag{1.23}$$

не зависит от α. Поэтому удобно перейти к новым переменным, которые также объединены в пары канонически сопряженных: α и $P = S_z - S_\zeta$, β и S_β, Φ и S_ζ. Переменная α является циклической, а канонически сопряженная ей переменная P — интегралом движения. Как было указано С.П. Новиковым [33], это вызвано симметрией уравнений относительно вращений вокруг направления магнитного поля и приводит к тому, что уравнения Леггетта обладают набором периодических (прецессирующих) решений вида

$$\begin{aligned} &\alpha = -\omega_P t, \qquad \beta = \mathrm{const}, \qquad \Phi = \mathrm{const}, \\ &S_z = \mathrm{const}, \qquad S_\beta = \mathrm{const}, \qquad P = \mathrm{const}, \end{aligned} \tag{1.24}$$

где ω_P — частота прецессии.

Такие решения были исследованы И.А. Фоминым [34]. Оказалось, что имеется несколько семейств решений. В связи с экспериментами по прецессирующим доменам нас будут интересовать два из них. Это решения классов Iб) и IIб) в обозначениях работы [34].

В случае Iб) прецессия происходит с частотой $\omega_P = \omega_L$,

$$S_\zeta = \omega_P, \quad S_z = \omega_P \cos\beta, \quad S_\beta = 0, \tag{1.25}$$

углы β и Φ связаны соотношением

$$(1+\cos\beta)(1+\cos\Phi) = \frac{3}{2}, \tag{1.26}$$

обеспечивающим минимальность дипольной энергии (1.23), а угол β меняется в пределах от 0 до θ_L.

В случае IIб) частота прецессии равна

$$\omega_P = \frac{1}{2}(\omega_L + \delta), \tag{1.27}$$

где

$$\delta = \left[\omega_L^2 - \frac{16}{15}\Omega_B^2(1+4\cos\beta)\right]^{1/2}, \tag{1.28}$$

$\Omega_B^2 = 3g_D\gamma^2/\chi$ — квадрат частоты продольного резонанса в B-фазе ^{3}He.

Компоненты спиновой плотности определяются выражениями

$$S_z = \omega_L\cos^2\frac{\beta}{2} - \delta\sin^2\frac{\beta}{2}, \quad S_\zeta = \omega_L\cos^2\frac{\beta}{2} + \delta\sin^2\frac{\beta}{2}, \quad S_\beta = 0, \tag{1.29}$$

угол β меняется от θ_L до π (при меньших β решение неустойчиво), а $\Phi = 0$.

Для решений Iб) и IIб) имеется двукратное вырождение — решение зависит от двух свободных параметров: угла β отклонения намагниченности от направления магнитного поля и фазы прецессии α. Оба решения являются устойчивыми. При $\beta = \theta_L$ решения Iб) и IIб) совпадают, поэтому их можно рассматривать как единый класс решений. Как было сказано выше, решение Iб) соотвествует минимуму дипольной энергии.

Остальные периодические решения уравнений Леггетта в B-фазе [34] либо неустойчивы, либо (по крайней мере, в пределе сильных магнитных полей $\omega_L \gg \Omega_B$) тривиальны в том смысле, что намагниченность в них направлена вдоль внешнего поля.

1.3. Низкочастотная динамика в ^{3}He-B на фоне однородной прецессии

Перейдем к рассмотрению спиновой гидродинамики сверхтекучего ^{3}He в неоднородном магнитном поле. В этом разделе мы опишем когерентно прецессирующую структуру, возникающую в B-фазе.

В неоднородном внешнем поле к гамильтониану $\mathcal{H}_0$ следует добавить так называемый спектроскопический член, учитывающий зависимость поля от координат,

$$E_{sp} = -\mathbf{S} \cdot (\mathbf{H} - \mathbf{H}_0) \tag{1.30}$$

и градиентную энергию, связанную с неоднородностью параметра порядка. В низшем порядке по градиентам в случае произвольной фазы вид выражения для градиентной энергии [22]

$$E_\nabla = \frac{K_1}{2}\nabla_i A_{\alpha j}\nabla_i A^*_{\alpha j} + \frac{K_2}{2}\nabla_i A_{\alpha j}\nabla_j A^*_{\alpha i} + \frac{K_3}{2}\nabla_i A_{\alpha i}\nabla_j A^*_{\alpha j}, \tag{1.31}$$

определяется требованием инвариантности относительно независимых вращений орбитального и спинового пространства. Коэффициенты K_1, K_2, K_3 имеют одинаковый порядок величины. В приближении слабой связи вблизи температуры перехода

$$K_1 = K_2 = K_3 = \frac{1}{5}N_F\xi_0^2, \tag{1.32}$$

где

$$\xi_0 = \left(\frac{7\zeta(3)}{48\pi^2}\right)^{1/2}\frac{\hbar v_F}{T_c}. \tag{1.33}$$

Характерная длина волны неоднородности, при которой градиентная энергия имеет тот же порядок величины, что и энергия конденсации

(1.7), называется длиной когерентности

$$\xi = \xi_0 \, (1 - T/T_c)^{-1/2} \, . \tag{1.34}$$

В однородном случае минимум энергии обеспечивается решением Iб) (см. предыдущий раздел), которое соответствует условиям экспериментов по импульсному ЯМР. Поскольку добавки к гамильтониану в неоднородном случае малы, они приводят только к снятию вырождения по α и β. Для нахождения периодического решения уравнений в первом приближении можно искать экстремум $E_{sp} + E_{\nabla}$, используя соотношения (1.25), (1.26) в качестве связей [6]. При этом получим уравнения на две неизвестные функции $\beta(\mathbf{r})$ и $\alpha(\mathbf{r})$. Решая эти уравнения, И.А. Фомин показал, что после отклонения намагниченности в сосуде импульсом поперечного поля (как описано во Введении) образуется структура, состоящая из двух доменов (рис.1.4), в одном из которых намагниченность параллельна внешнему полю (т.е. оси $\hat{z}$; непрецессирующий домен), а в другом отклонена от него на угол θ_L и прецессирует с частотой ω_P, не зависящей от координат (однородно прецессирующий домен, HPD). Частота ω_P совпадает с локальной ларморовской частотой на границе доменов. В опытах по импульсному ЯМР положение границы (а значит, и частота прецессии) определяются значением сохраняющейся величины $\int P dV$ после отклоняющего импульса.

В случае импульсного ЯМР такая структура медленно (по сравнению со временем расфазировки) релаксирует: домен с равновесным значением намагниченности растет, доменная стенка движется в сторону менее сильных полей, а частота прецессии, соответственно, падает. В экспериментах по непрерывному ЯМР прецессия может возбуждаться и поддерживаться при помощи поперечного радиочастотного поля с частотой ω_P, значение которой регулирует положение доменной стенки.

Если в двух сосудах на концах горизонтального канала создать прецессирующие домены с одинаковой частотой, но с ненулевой разностью фаз прецессии, то вдоль канала потечет сверхтекучий спиновый ток, пропорциональный градиенту фазы, аналогично тому, как градиент фазы параметра порядка в сверхтекучих системах с s-спариванием приводит к возникновению массового тока. А.С. Боровиком-Романовым, Ю.М. Буньковым, В.В. Дмитриевым, Ю.М. Мухарским и др. [35, 9, 36] проводились эксперименты по изучению явлений, связанных с протеканием этого спинового тока (наблюдение проскальзывания фазы и эффекта Джозефсона). И.А. Фоминым [10, 8] были получены уравнения, описывающие протекание тока, а именно (как и для двухдоменной структуры) уравнения низкочастотной динамики величин α и $u = \cos\beta$

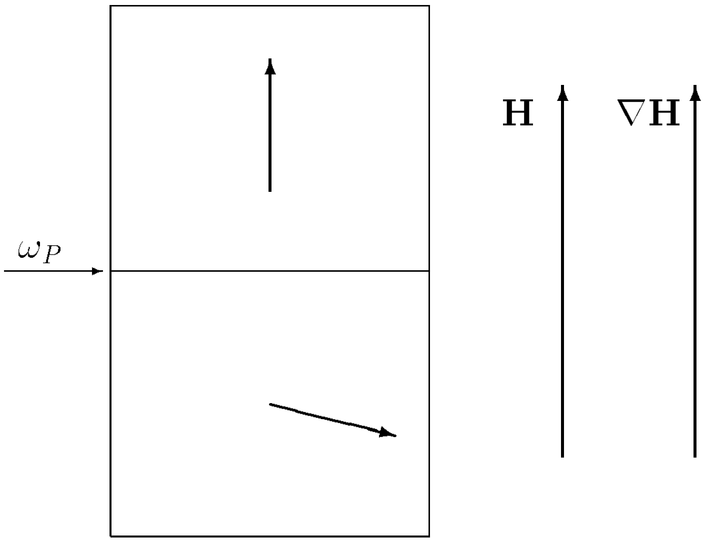


Рис. 1.4. Двухдоменная структура в ^{3}He-B в неоднородном внешнем поле. Частота прецессии ω_P совпадает с локальной ларморовской частотой на стенке.

как малого возмущения однородной прецессии (1.25), (1.26). В следующих разделах мы изучим влияние внешнего электрического поля на эту динамику, и вычислим соответствующие поправки к зависимости спинового тока от разности фаз на концах канала, значению критического тока и т.п. Для этого нам потребуется выражение для свободной энергии ^{3}He в электрическом поле, микроскопический вывод которого дается в ближайшем разделе.

1.4. Градиентная энергия и спиновый ток в электрическом поле

Известно [37, 38], что взаимодействие электрических дипольных моментов атомов гелия, индуцированных внешним электрическим полем, приводит к анизотропному взаимодействию параметра порядка $A_{\alpha i}$ в сверхтекучих фазах ^{3}He с полем:

$$U_E = -bA_{\alpha i}A^*_{\alpha j}E_iE_j\,/(A^*_{\alpha i}A_{\alpha i})\,. \qquad (1.35)$$

Константа взаимодействия

$$b \sim \frac{\alpha^2}{\mu^2}\left(\frac{R_E}{R}\right)^2 g_D$$

определяется величиной g_D магнитного диполь-дипольного взаимодействия, α — поляризуемость атомов гелия, μ — магнитный момент гелиевого ядра, $(R_E/R)^2$ — перенормирующий множитель [39].

Помимо этого в [40] показано, что неоднородность параметра порядка слегка деформирует уровни электронов в атоме ^{3}He, что приводит к появлению электрического дипольного момента. Соответствующий член в свободной энергии имеет вид

$$F^{def} = -\beta e_{ijk}\omega_{\alpha i}R_{\alpha j}E_k, \tag{1.36}$$

где $\hat{R}$ — параметр порядка в ^{3}He-B,

$$\omega_{\alpha i} = \frac{1}{2}e_{\alpha\beta\gamma}R_{\beta j}\nabla_i R_{\gamma j} \tag{1.37}$$

— угловая скорость вращения спинового пространства относительно орбитального (или, что то же самое, вращения матрицы параметра порядка) при движении вдоль i-й оси в реальном пространстве, β — константа взаимодействия, для которой в [40] дается оценка $\beta \sim 10^{-4}e/\text{см}$, точность которой невелика из-за неопределенности ферми-жидкостных поправок. Как показано в [12], это взаимодействие поля с параметром порядка приводит к возникновению спинового тока

$$j^{def}_{\alpha i} = -\frac{\partial F^{def}}{\partial \omega_{\alpha i}} = \beta e_{ijk}R_{\alpha j}E_k. \tag{1.38}$$

Недавно в работе [11] в связи с экспериментами по спиновой сверхтекучести в ^{3}He-B [35, 41] была высказана гипотеза о существовании другого типа взаимодействия с электрическим полем. Авторы предположили, что в сверхтекучей, нейтральной, но магнитной (спаривание с $S = 1$) ферми-жидкости существует спиновый ток, линейный по электрическому полю, описываемый формулой вида (0.2):

$$\mathbf{j}_z \sim \left(\nabla\alpha - 2\frac{\vec{\mu}\times\mathbf{E}}{\hbar c}\right).$$

Тогда в экспериментах с фиксированным спиновым током в канале длины l между двумя сосудами с однородно прецессирующей намагниченностью [11] включение электрического поля приводит к изменению разности углов прецессии в двух сосудах на величину

$$\delta\alpha \sim \frac{2\mu E}{\hbar c}l \sim 10^{-4}\text{рад},$$

если $E \approx 3 \cdot 10^4$В/см. Как указано в [11], такая величина доступна для измерений.

Из-за неточности в оценке постоянной β нельзя уверенно утверждать, что вклад в ток j^{def} является более существенным или менее существенным, чем тот, который изучается ниже. Однако в [12] показано, что эти два вклада легко различить на опыте, подбирая ту или иную геометрию эксперимента (относительное направление электрического поля и канала, по которому течет спиновый ток).

В этом разделе мы приведем вывод выражения для спинового тока и градиентной энергии в электрическом поле с учетом спин-орбитального взаимодействия. Оказывается, что выражение для спинового тока не совпадает с (0.2), но имеет тот же порядок величины. Обнаружение этого явления на эксперименте явилось бы первым наблюдением релятивисткого эффекта в ^{3}He.

1.4.1. Вывод выражения для спинового тока

Вклад электрического поля в спиновый ток возникает благодаря обычному релятивистскому спин-орбитальному взаимодействию $(\vec{\mu} \times \mathbf{p})\mathbf{E}/mc$ [42]. Используя градиентное разложение уравнений Горькова (ср. [43, 44]), мы вычислим гриновские функции системы, а затем получим микроскопическое выражение для спинового тока. При выводе будем считать ^{3}He неподвижным, т.е. равной нулю скорость нормальной компоненты: $\mathbf{v}_n = 0$.

Напишем уравнения Горькова [45, 46] с учетом спин-орбитального взаимодействия $\mu\hat{\vec{\sigma}}[\mathbf{pE}]/m^*c$:

$$\Big\{i\omega + \mu(\mathbf{r}) - \frac{1}{2m^*}(\mathbf{k} - i\nabla)^2 - \mathbf{B}\hat{\vec{\sigma}} + \frac{\mu}{m^*c}\hat{\vec{\sigma}}[\mathbf{E}, \mathbf{k} - i\nabla] \\ -\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{k}, \mathbf{r})\Big\}\hat{G}(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \omega) - \hat{\Delta}(\mathbf{k} - i\nabla, \mathbf{r})\hat{F}^+(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \omega) = \hat{1}, \tag{1.39}$$

$$\Big\{-i\omega + \mu(\mathbf{r}) - \frac{1}{2m^*}(\mathbf{k} - i\nabla)^2 - \mathbf{B}\hat{\vec{\sigma}}^T - \frac{\mu}{m^*c}\hat{\vec{\sigma}}^T[\mathbf{E}, \mathbf{k} - i\nabla] \\ -\delta\hat{\varepsilon}^T(-\mathbf{k}, \mathbf{r})\Big\}\hat{F}^+(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \omega) + \hat{\Delta}^+(\mathbf{k} - i\nabla, \mathbf{r})\hat{G}(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \omega) = 0. \tag{1.40}$$

Здесь

$$\omega = (2n+1)\pi T, \quad \mathbf{B}\hat{\vec{\sigma}} = -\frac{1}{2}|\gamma| H_z \hat{\sigma}_z,$$

$\mu(\mathbf{r})$ — химический потенциал, $\hbar = 1$ (до конца раздела 1.6), μ — магнитный момент ядер ^{3}He, который почти точно совпадает с аномальным магнитным моментом нейтрона, по этой причине мы записываем спин-орбитальный член в виде $\mu\hat{\vec{\sigma}}[\mathbf{pE}]/m^*c$, а не $\mu\hat{\vec{\sigma}}[\mathbf{pE}]/2m^*c$ (см. [42, Глава

IV]). Кроме того, гиромагнитное отношение для ядер ^{3}He отрицательно (спин и магнитный момент направлены в противоположные стороны), поэтому $\mu = \gamma/2 = -|\mu|$.

Мы пользуемся функциями Грина в импульсном представлении по разности координат:

$$\hat{G}(\mathbf{k},\mathbf{r}) = \int \exp[-i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\hat{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')d^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{1.41}$$

$$\hat{F}^+(\mathbf{k},\mathbf{r}) = \int \exp[-i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\hat{F}^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')d^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{1.42}$$

и для сокращения записи опускаем их зависимость от частоты. При этом параметр порядка B-фазы (1.5), (1.12) удовлетворяет равенству (уравнению на щель в теории БКШ)

$$\hat{\Delta}(\mathbf{k},\mathbf{r}) = -3g\int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}'}}{4\pi}\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{k_F^2}T\sum_{\omega}\hat{F}(\mathbf{k}',\mathbf{r}), \tag{1.43}$$

где константа связи g определяет силу притяжения атомов, приводящего к спариванию.

Ферми-жидкостные поправки даются формулой

$$\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{k},\mathbf{r}) = \delta\varepsilon\hat{1} + \hat{\vec{\sigma}}\vec{\nu}, \tag{1.44}$$

где

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon &= \mathrm{Sp}' \sum_{\mathbf{k}'} f^s\left(\mathbf{k}+\frac{\mu}{2c}\{\mathbf{E}\times\hat{\vec{\sigma}},\cdot\},\mathbf{k}'+\frac{\mu}{2c}\{\mathbf{E}\times\hat{\vec{\sigma}}',\cdot\}\right)\\ &\quad T\sum_{\omega}\delta\hat{G}(\mathbf{k}',\mathbf{r},\omega),\end{aligned} \tag{1.45}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nu} &= \mathrm{Sp}' \hat{\vec{\sigma}}'\sum_{\mathbf{k}'} f^a\left(\mathbf{k}+\frac{\mu}{2c}\{\mathbf{E}\times\hat{\vec{\sigma}},\cdot\},\mathbf{k}'+\frac{\mu}{2c}\{\mathbf{E}\times\hat{\vec{\sigma}}',\cdot\}\right)\\ &\quad T\sum_{\omega}\delta\hat{G}(\mathbf{k}',\mathbf{r},\omega).\end{aligned} \tag{1.46}$$

Здесь $\delta\hat{G}$ — отклонение функции Грина от равновесного значения (в отсутствие внешнего поля), Sp' — взятие следа по штрихованным индексам (точнее, индексам, входящим в $\hat{\vec{\sigma}}'$ и $\delta\hat{G}(\mathbf{k}')$). Фигурные скобки в аргументах функций f^s и f^a обозначают взятие антикоммутатора с матрицей, на которую действует оператор, в нашем случае с функцией Грина (происхождение этих аргументов легко понять из соображений калибровочной инвариантности, см. раздел 1.5).

Разложим, как обычно, f^s и f^a в ряды по полиномам Лежандра как функции от угла между аргументами:

$$
\begin{aligned}
f^s(\theta) &= \sum_l f_l^s P_l(\cos\theta), && (1.47)\\
f^a(\theta) &= \sum_l f_l^a P_l(\cos\theta). && (1.48)
\end{aligned}
$$

Гармоника f_1^s входит в перенормировку массы и уже учтена в уравнениях Горькова. Помимо нее, как будет видно из дальнейших вычислений, в перенормировку спинового тока входят f_l^a с нечетными l. Оставляя из них только f_1^a и пренебрегая высшими гармониками, имеем:

$$
f^a(\mathbf{k},\mathbf{k}') = f_1^a(\hat{\mathbf{k}},\hat{\mathbf{k}}') = N_F^{-1}F_1^a(\hat{\mathbf{k}},\hat{\mathbf{k}}'). \qquad (1.49)
$$

Мы можем разложить уравнения Горькова (1.39), (1.40) в ряд по степеням градиента ∇ и выделить члены G_i^0, F_i^{+0} этого ряда в нулевом поле и члены G_i^E, F_i^{+E}, линейные по полю $\mathbf{E}$:

$$
\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_1 + \ldots, \qquad \mathcal{G}_i = \mathcal{G}_i^0 + \mathcal{G}_i^E, \qquad (1.50)
$$

где

$$
\mathcal{G} = \begin{pmatrix} G \\ F^+ \end{pmatrix}. \qquad (1.51)
$$

Используя это разложение, из уравнений (1.39), (1.40) получаем:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_0^0 &= D^{-1}E^+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, && (1.52)\\
\mathcal{G}_1^0 &= -D^{-1}E^+(R_1 + C_1^0)\mathcal{G}_0^0, && (1.53)\\
\mathcal{G}_0^E &= -D^{-1}E^+\left(\frac{\mu}{m^*c}\mathbf{S}[\mathbf{E},\mathbf{k}] + C_0^E\right)\mathcal{G}_0^0, && (1.54)
\end{aligned}
$$

где

$$
E = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\hat{\Delta} \\ \hat{\Delta}^+ & \varepsilon^* \end{pmatrix}, \qquad (1.55)
$$

$$
D = EE^+ = |\varepsilon|^2 + \hat{\Delta}\hat{\Delta}^+, \qquad (1.56)
$$

$$
\varepsilon = i\omega + \mu - \frac{k^2}{2m^*}, \qquad (1.57)
$$

$$
R_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{\mathbf{k}\nabla}{im^*} & -\dfrac{\partial\hat{\Delta}}{\partial\mathbf{k}}\dfrac{\nabla}{i} \\[2ex] \dfrac{\partial\hat{\Delta}^+}{\partial\mathbf{k}}\dfrac{\nabla}{i} & -\dfrac{\mathbf{k}\nabla}{im^*} \end{pmatrix}, \qquad (1.58)
$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \hat{\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & -\hat{\vec{\sigma}}^T \end{pmatrix}, \tag{1.59}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{k},\mathbf{r}) & 0 \\ 0 & -\delta\hat{\varepsilon}^T(-\mathbf{k},\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \tag{1.60}$$

а C_1^0, C_0^E — члены разложения величины C по степеням градиентов и внешнего поля.

Плотность спинового тока можно выразить через функцию Грина:

$$\begin{aligned} j_{\alpha i}(\mathbf{r}) \;\; = \;\; & \left\{ \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{k_i}{m} T \sum_{\omega} \frac{1}{4} \mathrm{Sp}(\hat{\sigma}_\alpha \delta\hat{G}(\mathbf{k},\mathbf{r})) + \text{э.с.} \right. \\ & \left. + \frac{\mu}{2mc} e_{\alpha i k} E_k n \right\} \cdot \left(1 + \frac{F_1^a}{3}\right) \frac{m}{m^*}, \end{aligned} \tag{1.61}$$

где n — концентрация частиц. Для вывода этой формулы удобно воспользоваться кинетическим уравнением для сверхтекучей ферми-жидкости [22, Глава 10], из которого получаем выражение для спинового тока через функцию распределения:

$$j_{\alpha i} = \frac{1}{2} \sum_k v_{Fi} \mathrm{Sp}\left[\hat{\sigma}^\alpha \delta\hat{n}'_k\right], \tag{1.62}$$

где

$$\delta\hat{n}'_k = \delta\hat{n}_k - \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi}{E}\varphi\right)\delta\hat{\varepsilon}_k, \tag{1.63}$$

$\varphi = -(1/2)\,\mathrm{th}(E/2T)$, $E = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}$ — энергия боголюбовских квазичастиц, а отклонение энергии от равновесного значения

$$\delta\varepsilon_{k\alpha\beta} = \delta\varepsilon^{ext}_{k\alpha\beta} + \sum_{k'} f_{k\alpha\beta,k'\alpha'\beta'} \delta n_{k'\beta'\alpha'}. \tag{1.64}$$

Функция ферми-жидкостного взаимодействия связана с введенными выше параметрами f^s и f^a соотношением

$$f_{k\alpha\beta,k'\alpha'\beta'} = f^s(\mathbf{k},\mathbf{k}')\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha'\beta'} + f^a(\mathbf{k},\mathbf{k}')\vec{\sigma}_{\alpha\beta}\vec{\sigma}_{\alpha'\beta'}, \tag{1.65}$$

а вклад внешнего поля в энергию

$$\delta\hat{\varepsilon}^{ext}_k = \frac{\mu}{m^* c}(\mathbf{k}\times\mathbf{E})\,\hat{\vec{\sigma}}. \tag{1.66}$$

Вычисляя спиновый ток $j^{(0)}$ при $F_1^a = 0$ и выражая затем ферми-жидкостный вклад через $j^{(0)}$, получаем формулу (1.61).

Вычисляя поправки (1.53), (1.54) к функции Грина и подставляя их в (1.61), при $F_1^a = 0$ получаем такое выражение для спинового тока:

$$j_{\alpha i}^{(0)} = -\frac{N_F v_F^2}{12}(1 - Y_0) \cdot \left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} - \frac{1}{5}P_{\alpha i,\beta j}\right)\left(\omega_{\beta j} - \frac{2\mu}{c}e_{\beta jk}E_k\right). \qquad (1.67)$$

Здесь введено обозначение

$$P_{\alpha i,\beta j} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} + R_{\alpha i}R_{\beta j} + R_{\alpha j}R_{\beta i}, \qquad (1.68)$$

а $Y_0(T)$ — функция Иосида:

$$Y_0(T) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial E}\right), \qquad (1.69)$$

$Y_0(T) = 0$ при $T = 0$ и $Y_0(T) = 1$ при $T \geq T_c$.

Приведем промежуточные формулы для сумм по частотам и импульсам, которые возникают при вычислении спинового тока из (1.61):

$$\int d\xi \quad T\sum_{\omega} \quad \frac{1}{D^2} \quad = \quad \frac{1 - Y_0}{2\Delta^2}, \qquad (1.70)$$

$$\int d\xi \quad T\sum_{\omega} \quad \frac{(\varepsilon^*)^2}{D^2} \quad = -\frac{1 + Y_0}{2}. \qquad (1.71)$$

Выражение (1.67) дает бездиссипативный спиновый ток в сверхтекучем ^{3}He-B. Вклад в ток, вызванный электрическим полем, будет компенсироваться спиновым сверхтоком, линейным по градиентам параметра порядка. Таким образом, возникнет сложное распределение спинового тока, зависящее от распределения приложенного электрического поля, граничных условий и т.п.

1.4.2. Учет ферми-жидкостного взаимодействия

Для учета ферми-жидкостных поправок (помимо перенормировки эффективной массы квазичастиц), используя (1.61), вычислим добавку к энергии (1.46):

$$\nu_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \frac{2f_1^a}{(1 + F_1^a/3)} m^* \frac{k_i + (\mu/2c)\left\{\left(\mathbf{E} \times \hat{\vec{\sigma}}\right)_i, \cdot\right\}}{k_F^2} j_{\alpha i}. \qquad (1.72)$$

Второе слагаемое в числителе четно по $\mathbf{k}$ и не дает вклада в перенормировку спинового тока. Пользуясь опять поправками к гриновской функции (1.53), (1.54), находим связь полного спинового тока с током без учета F_1^a:

$$j_{\alpha i} = \left(1 + \frac{F_1^a}{3}\right) j_{\alpha i}^{(0)} - \frac{1}{3} F_1^a \left(Y_0 \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} + \frac{1 - Y_0}{5} P_{\alpha i,\beta j}\right) j_{\beta j}. \tag{1.73}$$

Величину $P_{\alpha i,\beta j}$ можно рассматривать как матрицу линейного оператора, который преобразует тензор с двумя индексами β и j в тензор с индексами α и i. Чтобы выразить j через $j^{(0)}$, удобно раскладывать встречающиеся четырехиндексные тензоры по проекторам на собственные подпространства этого линейного оператора: это подпространства тензоров вида $R_{\alpha\beta}\omega_{\beta i}$, где ω — скалярная, симметричная или кососимметричная матрица. Соответствующие проекторы имеют вид:

$$p_1 = \frac{1}{3} R_{\alpha i} R_{\beta j}, \tag{1.74}$$

$$p_2 = \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} + R_{\alpha j} R_{\beta i}) - p_1, \tag{1.75}$$

$$p_3 = \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} - R_{\alpha j} R_{\beta i}). \tag{1.76}$$

Тогда обращение четырехиндексных тензоров сводится просто к обращению коэффициентов при проекторах.

В результате получаем выражение для спинового тока с учетом F_1^a:

$$j_{\alpha i} = -R \cdot \frac{N_F v_F^2}{60}(1 - Y_0) \left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} - \frac{1}{5}\left(P_{\alpha i,\beta j} + \delta P_{\alpha i,\beta j}\right)\right)(\omega_{\beta j} - \frac{2\mu}{c} e_{\beta jk} E_k), \tag{1.77}$$

где

$$\delta P_{\alpha i,\beta j} = \delta \cdot \left(-\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} + R_{\alpha j} R_{\beta i}\right),$$

$$R = \frac{1 + F_1^a/3}{1 + \frac{F_1^a}{3}\left(1 - \frac{3}{5}(1 - Y_0)\right)},$$

$$\delta = \frac{\frac{F_1^a}{3}(1 - Y_0)}{1 + \frac{F_1^a}{3} Y_0}.$$

При $\mathbf{E} = 0$ это совпадает с результатом Кросса [47]. R слабо отличается от 1, а δ мало во всем интервале $0 \le T \le T_c$ (согласно [48] $0.88 \le R \le 1$ и $|\delta| \le 0.2$).

1.4.3. Градиентная энергия

Спиновый ток можно получить, варьируя свободную энергию по $\omega_{\alpha i}$:

$$j_{\alpha i} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \omega_{\alpha i}}. \tag{1.78}$$

Следовательно, пользуясь полученным выше выражением для спинового тока (1.67), можно восстановить выражение для энергии (это выражение можно получить и непосредственно из уравнений Горькова во втором порядке градиентного разложения, ср. [43, 44]):

$$\begin{aligned} F_\nabla &= \frac{\chi}{2\gamma^2}\left[c_\parallel^2\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} - (c_\parallel^2 - c_\perp^2)(R_{\alpha i}R_{\beta j} + R_{\alpha j}R_{\beta i})\right]\cdot \\ &\quad \cdot(\omega_{\alpha i} - \frac{2\mu}{c}e_{\alpha ik}E_k)(\omega_{\beta j} - \frac{2\mu}{c}e_{\beta jl}E_l). \end{aligned} \tag{1.79}$$

Здесь $c_\parallel^2$, $c_\perp^2$ — введенные И.А. Фоминым параметры, характеризующие спектр спиновых волн и связанные с обычными скоростями продольных и поперечных волн соотношениями $c_\parallel^2 = c_{\perp об}^2$, $c_\perp^2 = (1/2)(c_{\perp об}^2 + c_{\parallel об}^2)$ (см. [12]). В приближении слабой связи

$$c_\parallel^2 = \frac{4}{3}c_\perp^2 = \frac{4}{15}(1 - Y_0)\frac{\chi_{n0}}{\chi}v_F^2, \tag{1.80}$$

где χ_{n0} — магнитная восприимчивость нормального ^{3}He без учета ферми-жидкостных поправок.

Выражение (1.79) не является наиболее общим феноменологическим выражением для части свободной энергии, зависящей от $\omega_{\alpha i}$, даже вблизи T_c: в принципе, коэффициенты при $R_{\alpha i}R_{\beta j}$ и $R_{\alpha j}R_{\beta i}$ могут быть различными (см. (1.31)). В предыдущем разделе показано, что эти коэффициенты действительно различны, если учитывать ферми-жидкостные поправки. Однако влияние этих поправок невелико, и в дальнейшем мы не будем их учитывать.

Переходя в систему координат, связанную с лабораторной поворотом при помощи матрицы параметра порядка, мы можем переписать формулу (1.79) следующим образом:

$$\begin{aligned} F_\nabla &= \frac{\chi}{2\gamma^2}\left[c_\parallel^2\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} - (c_\parallel^2 - c_\perp^2)(\delta_{\alpha i}\delta_{\beta j} + \delta_{\alpha j}\delta_{\beta i})\right]\cdot \\ &\cdot\left(\tilde\omega_{\alpha i} - \frac{2\mu}{c}R_{\alpha'\alpha}e_{\alpha' ik}E_k\right)\left(\tilde\omega_{\beta j} - \frac{2\mu}{c}R_{\beta'\beta}e_{\beta' jl}E_l\right), \end{aligned} \tag{1.81}$$

где компоненты “угловой скорости” $\tilde\omega_{\alpha i} = R_{\beta\alpha}\omega_{\beta i}$ во вращающейся системе координат:

$$\begin{aligned} \tilde\omega_{xi} &= -\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\sin\beta\cos\gamma + \frac{\partial\beta}{\partial x_i}\sin\gamma, \\ \tilde\omega_{yi} &= \frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\sin\beta\sin\gamma + \frac{\partial\beta}{\partial x_i}\cos\gamma, \\ \tilde\omega_{zi} &= \frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\cos\beta + \frac{\partial\gamma}{\partial x_i}. \end{aligned} \tag{1.82}$$

1.5. Спин-орбитальное взаимодействие и калибровочная инвариантность

Легко заметить, что в вышеприведенные выражения для спинового тока и градиентной энергии градиенты параметра порядка и электрическое поле входят только в комбинации $\omega_{\alpha i} - (2\mu/c)e_{\alpha ik}E_k$. В работе [12] показано, что этот факт является следствием SU(2)-калибровочной инвариантности системы относительно локальных спиновых поворотов. В этом разделе мы объясним происхождение калибровочной инвариантности и покажем, как требование инвариантности согласуется с вычислениями предыдущего раздела.

Энергия атома ^{3}He во внешнем электромагнитном поле

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \vec{\mu} \cdot \left(\mathbf{H} - \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{E}\right). \tag{1.83}$$

Если ввести калибровочные поля $V^\alpha = -\mu H^\alpha$ и $A_i^\alpha = (\mu/mc)e_{\alpha ik}E_k$, то гамильтониан жидкости приобретает вид

$$\mathcal{H} = \int dV \psi^+(\mathbf{r}) \left(\frac{1}{2m}\left(\hat{p}_i + mA_i^\alpha\hat{\sigma}^\alpha\right)^2 + V^\alpha\hat{\sigma}^\alpha\right)\psi(\mathbf{r}) + \mathcal{H}_{int}. \tag{1.84}$$

Слагаемое $(A_i^\alpha\hat{\sigma}^\alpha)^2 = A_i^\alpha A_i^\beta\left(\delta_{\alpha\beta} + ie_{\alpha\beta\gamma}\hat{\sigma}_\gamma\right) = A_i^\alpha A_i^\alpha$ несущественно для изучения спиновой динамики жидкости во внешнем поле. Поэтому уравнение движения для операторов ψ и действие жидкости (но, разумеется, не электромагнитного поля) инвариантны относительно локальных спиновых поворотов (калибровочных преобразований из группы SU(2))

$$\psi \longrightarrow \exp\left(i\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\theta}(\mathbf{r}, t)\right)\psi, \tag{1.85}$$

сопровождаемых одновременной заменой калибровочных полей (ср. [49, Часть II, Глава 6])

$$\mathbf{A}_i \;\rightarrow\; \hat{R}(-2\vec{\theta})\mathbf{A}_i - \frac{i}{2m}\mathrm{Sp}\left\{\hat{\vec{\sigma}}\exp\left(i\hat{\vec{\sigma}}\vec{\theta}\right)\nabla_i\left[\exp\left(-i\hat{\vec{\sigma}}\vec{\theta}\right)\right]\right\}, \tag{1.86}$$

$$\mathbf{V} \;\rightarrow\; \hat{R}(-2\vec{\theta})\mathbf{V} - \frac{i}{2}\mathrm{Sp}\left\{\hat{\vec{\sigma}}\exp\left(i\hat{\vec{\sigma}}\vec{\theta}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left[\exp\left(-i\hat{\vec{\sigma}}\vec{\theta}\right)\right]\right\}, \tag{1.87}$$

где $\hat{R}(-2\vec{\theta})$ обозначает поворот на угол $-2|\theta|$ вокруг оси $\hat{\vec{\theta}}$. Следовательно, все наблюдаемые величины должны быть калибровочно инвариантны, а значит, могут зависеть от производных и калибровочных полей только в комбинациях, являющихся ковариантными производными:

$$D_t = \partial_t + i\mathbf{V}\hat{\vec{\sigma}}, \qquad D_i = \partial_i + im\mathbf{A}_i\hat{\vec{\sigma}}. \tag{1.88}$$

Именно поэтому электрическое поле входит в формулы только в комбинации с величиной $\omega_{\alpha i}$.

Отметим также, что уравнения Горькова (1.39), (1.40) имеют калибровочно-инвариантную форму: в первом из них имеются операторы $\mathbf{k} - i\nabla + (\mu/c)\mathbf{E} \times \hat{\vec{\sigma}}$ и $\partial_t - i\mu\mathbf{H}\hat{\vec{\sigma}}$, действовавшие до усреднения на ψ_α, являющийся спинорным вектором, а во втором — операторы $\mathbf{k} - i\nabla - (\mu/c)\mathbf{E} \times \hat{\vec{\sigma}}^T$ и $\partial_t + i\mu\mathbf{H}\hat{\vec{\sigma}}^T$, действовавшие на спинорный ковектор $\psi^{+,\alpha}$.

Для вывода калибровочно-инвариантной формы ферми-жидкостного взаимодействия представим функцию распределения в виде интеграла Фурье:

$$n_{k\beta\alpha}(\mathbf{R}) = \int d\mathbf{r} \left\langle \psi_\alpha^+ \left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}\right) \psi_\beta \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right) \right\rangle e^{i\mathbf{kr}}. \tag{1.89}$$

Из этой формулы видно, что действие оператора $\mathbf{k}$ на функцию распределения равносильно действию оператора $(i/2)(\nabla_1 - \nabla_2)$, где ∇_1 действует на аргумент ψ^+, а ∇_2 — на аргумент ψ. Поэтому ∇_1 удлиняется в соответствии с формулой (1.88), и удлиненный оператор действует на спиновый индекс ψ, а ∇_2 заменяется на $\nabla_2 - i\hat{\vec{\sigma}}^T \mathbf{A}_i \cdot m$ и действует на спиновый индекс ψ^+. Таким образом, для разности ковариантного и обычного импульса при действии на матрицу функции распределения получаем:

$$[(K_i - k_i)\, n]_{\beta\alpha} = \frac{m}{2} A_i^\nu \left(\sigma^\nu_{\alpha'\alpha} n_{\beta\alpha'} + \sigma^\nu_{\beta\beta'} n_{\beta'\alpha}\right) = \frac{m}{2} A_i^\nu \left\{\hat{\sigma}^\nu, \hat{n}\right\}_{\beta\alpha}. \tag{1.90}$$

Воспользовавшись определением калибровочного поля, в результате приходим к замене $\mathbf{k}$ на

$$\mathbf{k} + \frac{\mu}{2c}\{\mathbf{E} \times \hat{\vec{\sigma}}, \cdot\}, \tag{1.91}$$

т.е. к выражению (1.45), (1.46).

В дальнейшем нам понадобится выражение для действия ковариантного градиента на матрицу $A_{\alpha i}$ параметра порядка. Для вывода соответствующего выражения воспользуемся тем, что величина $\Delta_{k,\mu\nu}(\mathbf{R}) = A_{\alpha i}\hat{k}_i \left(\hat{\sigma}_\alpha \hat{g}\right)_{\mu\nu}$ выражается через аномальную гриновскую функцию (см. (1.43)), т.е. через интеграл

$$\int d\mathbf{r} \psi_\mu \left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}\right) \psi_\nu \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right) e^{i\mathbf{kr}}. \tag{1.92}$$

В соответствии с этим, удлиняя производные, действующие на операторы уничтожения, приходим к формуле

$$D_i \hat{\Delta} = \nabla_i \hat{\Delta} + imA_i^\alpha \left(\hat{\sigma}^\alpha \hat{\Delta} + \hat{\Delta}\hat{\sigma}^{\alpha,T}\right), \tag{1.93}$$

или, после перехода к матрице $A_{\alpha i}$ и выражения калибровочного поля через электрическое, к формуле

$$D_i A_{\alpha j} = \nabla_i A_{\alpha j} + \frac{2\mu}{c}\left(\delta_{\alpha i} E_\beta - \delta_{\beta i} E_\alpha\right) A_{\beta j}. \tag{1.94}$$

Эту формулу удобно использовать и для вывода калибровочно инвариантной комбинации $\omega_{\alpha i} - (2\mu/c) e_{\alpha i k} E_k$.

1.6. Электрическое поле и протекание спинового тока

Протекание спинового тока в канале между двумя прецессирующими доменами [35, 9] происходит на фоне однородной прецессии (1.25), (1.26). При этом медленно меняющимися переменными являются $u = \cos\beta$ и $\psi = \alpha + \omega_P t$ [10, 50]. Поскольку угол $\alpha \approx -\omega_P t$ быстро меняется, мы можем усреднять физические величины по α. И.А. Фомин показал, что при этом одно из уравнений спиновой динамики представляет собой закон сохранения P-компоненты спина (поскольку мы ограничиваемся решениями класса Iб), это равносильно сохранению S_z-компоненты), а соответствующий ток равен

$$\tilde{j}_{zk} = -\frac{\partial F_\nabla}{\partial \nabla_k \psi}. \tag{1.95}$$

В электрическом поле возникает дополнительный вклад в ток, который вычисляется аналогично. В результате (как и выше, в первом порядке по полю) получим

$$\tilde{j}_{zz} = -4 \sin\Phi \sin^2\beta \frac{\mu}{c}(c_\parallel^2 - c_\perp^2) E_z, \tag{1.96}$$

$$\tilde{j}_{zk} = -\left(\frac{c_\parallel^2 - 3c_\perp^2}{2}\right)(1 - \cos\beta)\frac{2\mu}{c} e_{klz} E_l + (c_\parallel^2 - c_\perp^2)\sin^2\beta \sin\Phi \frac{2\mu}{c} E_k, \tag{1.97}$$

где $k = x, y$ — компоненты, перпендикулярные внешнему магнитному полю.

Рассмотрим теперь зависимость спинового тока в канале от разности фаз на концах канала (т.е. от градиента угла прецессии). Используя вышеприведенные выражения для тока и результаты [10, 50] для случая нулевого электрического поля, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{j}_{zk} &= -(1-u)\left[((1-u)c_\parallel^2 + (1+u)c_\perp^2)\alpha'_k - \frac{2\mu}{c} e_{klz} E_l \left(\frac{c_\parallel^2 - 3c_\perp^2}{2}\right)\right. \\ &\left. \mp \frac{2\mu}{c} E_k (c_\parallel^2 - c_\perp^2)\sqrt{3(u + \frac{1}{4})}\right]. \end{aligned} \tag{1.98}$$

Направим ось y вдоль канала, при этом $\alpha' = \alpha'_y$.

Другое уравнение низкочастотной динамики имеет вид

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\omega_L + \frac{1}{\omega_P}\frac{\delta F}{\delta u}, \tag{1.99}$$

где в нашем случае $\delta F_\nabla/\delta u = \partial F_\nabla/\partial u$. Как и в [10] будем искать стационарные решения, для которых $\alpha' = \text{const}$ и $u = \text{const}$. В результате получим уравнение, связывающее α' и u:

$$c_\perp^2 = c^2(1-u)(\alpha'\xi)^2 + (\alpha'\xi)\frac{2\mu\xi}{c}\left[c^2(-1/2)E_x \mp (c_\parallel^2 - c_\perp^2)\frac{1-6u}{2\sqrt{4u+1}}\sqrt{3}E_y\right], \tag{1.100}$$

где $\xi = c_\perp/\sqrt{\omega_P(\omega_P - \omega_L)}$,

$$c^2(u) = uc_\parallel^2 + (1-u)c_\perp^2. \tag{1.101}$$

В случае $E = 0$ имеются два режима: $0 \le \alpha' \le \alpha'_{c1}$ и $\alpha'_{c1} \le \alpha' \le \alpha'_{c2}$, где $\alpha'_{c1}\xi = (4c_\perp^2/(5c_\parallel^2 - c_\perp^2))^{1/2}$ и $\alpha'_{c2}\xi = 1$. Зависимости $u(\alpha')$ и $\tilde{j}_{zy}(\alpha')$ имеют в точке $\alpha' = \alpha'_{c1}$ изломы. В случае же $E \ne 0$ имеется только один режим, и функции $u(\alpha')$ и $\tilde{j}_{zy}(\alpha')$ сглаживаются.

Зависимость спинового тока от α' дается формулой (1.98), где u можно извлечь из (1.100). Если $\alpha'\xi \ll 1$ (и, следовательно, $u + 1/4 \ll 1$), мы получаем из (1.98), (1.100):

$$\tilde{j}_{zy} = \frac{\mu}{c}E_x \cdot \frac{5}{2}c^2(-1/2) - \frac{5}{2}c^2(5/8)\alpha'. \tag{1.102}$$

Зависимость от E_y возникает только во втором порядке по электрическому полю. Из этого выражения видно, что спиновый ток может существовать в отсутствие градиента α, если электрическое поле перпендикулярно магнитному полю и каналу. Отметим, что малым параметром данной задачи является величина $\mu E\xi/c$. Условие сохранения спинового тока в канале после включения электрического поля дает для дополнительного градиента фазы выражение

$$\delta\alpha' = \frac{\mu E_x}{c}\frac{c^2(-1/2)}{c^2(5/8)} = -\frac{4\mu E_x}{11c}. \tag{1.103}$$

Последнее равенство верно в приближении слабой связи (1.80).

1.7. Сверхтекучий спиновый ток и гидродинамические моды в ^{3}He-A_1 в электрическом поле

Как мы показали выше, внешнее электрическое поле вызывает сверхтекучий спиновый ток в ^{3}He. В работе [51] в связи с изучением сверхтекучих массовых и спиновых токов, вызванных эффектом Ааронова-Кашера [52], авторы предложили возбуждать спиновый ток в A_1-фазе гелия-3 посредством переменного электрического поля.

Интерес к A_1-фазе связан с тем, что в этой фазе сверхтекучая компонента имеет определенную проекцию спина $S_z = 1$, поэтому возникновение спинового тока означает и возникновение обычного массового тока. В этом разделе мы изучим возможность возбуждения гидродинамических мод при помощи переменного электрического поля, и обсудим, можно ли наблюдать соответствующий эффект на эксперименте. Результаты настоящего раздела опубликованы в работе [24].

1.7.1. Спиновый ток в A_1-фазе в электрическом поле

Из выражения (1.31) для градиентной энергии сверхтекучего ^{3}He можно получить выражения для массового и спинового сверхтекучих токов. Для этого можно воспользоваться тем, что оператор числа частиц (точнее, в сверхтекучем состоянии, $-\hbar N/2$) и оператор спина являются генераторами соответственно калибровочных преобразований умножения на фазу (группа U(1)) и спиновых вращений (группа SU(2) или SO(3)). Поэтому [53], [22, Глава 9] массовый и спиновый сверхтекучие токи можно вычислять как вариацию свободной энергии при фазовых и спиновых поворотах. А именно: изменение энергии при преобразовании

$$A_{\alpha i} \quad \to \quad A_{\alpha i} \cdot \exp(i\phi) \tag{1.104}$$

дает массовый сверхтекучий ток:

$$\mathbf{j}^s = \frac{2m}{\hbar}\frac{\partial F}{\partial \nabla \phi}, \tag{1.105}$$

а изменение при преобразовании

$$A_{\alpha i} \quad \to \quad O_{\alpha\beta}(\vec{\theta}) A_{\beta i}, \tag{1.106}$$

где $\hat{O}$ — матрица поворота на угол $|\theta|$ вокруг оси $\hat{\theta}$, дает спиновый сверхтекучий ток (ср. с формулой (1.78) для B-фазы):

$$\mathbf{j}^{sp}_i = -\frac{\partial F}{\partial \nabla_i \vec{\theta}}. \tag{1.107}$$

В результате вычислений приходим к формулам:

$$
\begin{aligned}
j_i^s &= \frac{2m}{\hbar}\mathrm{Im}\left[K_1 A^*_{\alpha j}\nabla_i A_{\alpha j} + K_2 A^*_{\alpha j}\nabla_j A_{\alpha i} + K_3 A^*_{\alpha i}\nabla_j A_{\alpha j}\right], && (1.108)\\
j_{\alpha i}^{sp} &= -e_{\alpha\beta\gamma}\mathrm{Re}\left[K_1 A^*_{\beta j}\nabla_i A_{\gamma j} + K_2 A^*_{\beta j}\nabla_j A_{\gamma i} + K_3 A^*_{\beta i}\nabla_j A_{\gamma j}\right] && (1.109)
\end{aligned}
$$

Для того, чтобы вычислить спиновый ток в электрическом поле, можно воспользоваться калибровочной инвариантностью: как было показано в разделе 1.5, ковариантные производные параметра порядка связаны с обычными производными формулами:

$$
\begin{aligned}
D_i A_{\alpha j} &= \nabla_i A_{\alpha j} + \frac{2\mu}{\hbar c}\left(\delta_{\alpha i}E_\beta - \delta_{\beta i}E_\alpha\right)A_{\beta j},\\
D_i A^*_{\alpha j} &= \nabla_i A^*_{\alpha j} + \frac{2\mu}{\hbar c}\left(\delta_{\alpha i}E_\beta - \delta_{\beta i}E_\alpha\right)A^*_{\beta j}.
\end{aligned}
$$

Выражения для сверхтекучих токов в электрическом поле получатся, если мы заменим в формулах (1.108), (1.109) градиенты на ковариантные производные, а затем опустим сами градиенты:

$$
\begin{aligned}
j_i^s &= \frac{4\mu m}{\hbar^2 c}E_\mu \mathrm{Im}\left[K_1 A^*_{ij}A_{\mu j} - K_1 A^*_{\mu j}A_{ij} + K_2 A^*_{jj}A_{\mu i}\right. && (1.110)\\
&\left. -K_2 A^*_{\mu j}A_{ji} + K_3 A^*_{ji}A_{\mu j} - K_3 A^*_{\mu i}A_{jj}\right],\\
j_{\alpha i}^{sp} &= \frac{2\mu}{\hbar c}e_{\alpha\beta\gamma}\mathrm{Re}\left[K_1(E_\nu\delta_{i\beta} - E_\beta\delta_{i\nu})A_{\nu j}A^*_{\gamma j} + \right. && (1.111)\\
&\left. K_2(E_\nu\delta_{j\beta} - E_\beta\delta_{j\nu})A_{\nu i}A^*_{\gamma j} + K_3(E_\nu\delta_{j\beta} - E_\beta\delta_{j\nu})A_{\nu j}A^*_{\gamma i}\right].
\end{aligned}
$$

Для A_1-фазы с параметром порядка (1.10) эти выражения принимают вид

$$
\begin{aligned}
j_i^s &= \frac{2\mu m\Delta^2}{\hbar^2 c}\left[(2K_1+K_2+K_3)[\mathbf{EV}]_i + (K_2+K_3)l_i(\mathbf{l},\mathbf{V},\mathbf{E})\right], && (1.112)\\
j_{\alpha i}^{sp} &= \frac{\mu\Delta^2}{2\hbar c}\left[(2K_1+K_2+K_3)(2e_{\alpha ik}E_k + [\mathbf{EV}]_\alpha V_i - e_{\alpha i\gamma}V_\gamma(\mathbf{EV}))\right.\\
&+(K_2+K_3)(2[\mathbf{El}]_\alpha l_i + [\mathbf{VE}]_\alpha(\mathbf{lV})l_i + [\mathbf{lV}]_\alpha(\mathbf{EV})l_i) && (1.113)\\
&\left.+(K_2-K_3)(e_{\alpha ik}l_k(\mathbf{EV}) + E_\alpha[\mathbf{Vl}]_i)\right].
\end{aligned}
$$

В дальнейшем мы будем рассматривать случай протекания токов в сосуде вдоль оси x, магнитное поле и вектор $\mathbf{V}$ считать направленными вдоль оси z, а электрическое поле — вдоль оси y. В такой ситуации спиновый и массовый токи совпадают:

$$
j_x^s = \frac{2m}{\hbar}M_s j_{zx}^{sp} = \rho_s M_s \frac{\mu E}{mc}, \tag{1.114}
$$

где при фиксированном направлении распространения сверхтекучая плотность является скаляром

$$\rho_s = \frac{2m^2}{\hbar^2}\Delta^2 \left[2K_1 + (K_2 + K_3)(1 - l_x^2)\right], \qquad (1.115)$$

а число $M_s = (\mathbf{VH})/H = V_z = \pm 1$ показывает направление спина конденсата.

1.7.2. Гидродинамические моды

Выпишем линейные гидродинамические уравнения для A_1-фазы без учета диссипации [54, 55, 56]. Эти уравнения можно получить, пользуясь общей схемой [57, 53]. Мы будем считать не зависящими от времени направления векторов $\mathbf{V}$ (он ориентирован вдоль магнитного поля) и $\mathbf{l}$, динамика которого заморожена из-за так называемой "орбитальной вязкости" [58].

Во-первых, имеется уравнение непрерывности — закон сохранения числа частиц:

$$\dot{\rho} + \nabla\mathbf{g} = 0, \qquad (1.116)$$

где ρ — плотность жидкости, $\mathbf{g}$ — плотность импульса. Во-вторых, благодаря трансляционной инвариантности выполнен закон сохранения импульса:

$$\dot{\mathbf{g}} + \nabla P = 0, \qquad (1.117)$$

где P — давление. Далее, в линейном приближении, имеется обратимый поток энтропии s:

$$\dot{s} + \nabla(s\mathbf{v}_n) = 0, \qquad (1.118)$$

переносимый нормальной компонентой, движущейся со скоростью $\mathbf{v}_n$.

В A_1-фазе симметрии относительно орбитальных, спиновых и фазовых вращений нарушены, но не независимо. Параметр порядка в A_1-фазе можно (неоднозначно) записать в виде

$$A_{\alpha i} = \frac{\Delta(T)}{2} e^{i\varphi^0} \cdot (V'_\alpha + iV''_\alpha)(\Delta'_i + i\Delta''_i). \qquad (1.119)$$

Орбитальный поворот вокруг вектора $\mathbf{l}$, спиновый поворот вокруг вектора $\mathbf{V}$ и домножение на фазовый множитель такого параметра порядка могут компенсировать друг друга (спонтанное нарушение относительной спин-орбитально-калибровочной симметрии). Переменной, описывающей это нарушение симметрии, является разность $\phi_\uparrow$ фазы параметра порядка ϕ^0 и углов вращения вокруг осей $\mathbf{l}$ и $\mathbf{V}$ (обозначение связано с тем, что эта переменная описывает конденсат с фиксированным направлением спина). Для бесконечно малого изменения этой переменной имеем:

$$d\phi_\uparrow = d\phi^0 - \mathbf{l}\cdot d\vec{\theta}^o - \mathbf{V}\cdot d\vec{\theta}^s, \qquad (1.120)$$

где $\vec{\theta}^o$ и $\vec{\theta}^s$ — углы орбитальных и спиновых поворотов. Градиент $\phi_\uparrow$ задает сверхтекучую скорость:

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{2m}\nabla\phi_\uparrow = \frac{\hbar}{2m}\left(\nabla\varphi^0 + \Delta_i'\nabla\Delta_i'' + V_\alpha'\nabla V_\alpha''\right) \qquad (1.121)$$

(для параметра порядка в форме (1.10) член $\nabla\varphi^0$ следует опустить).

Уравнения движения для величин φ^0, $\vec{\theta}^o$, $\vec{\theta}^s$ получаются стандартным образом (см., например, [22, Глава 9]). Их правые части представляют собой производные энергии по термодинамическим переменным, соответствующим генераторам градиентной, орбитальной или спиновой симметрии.

Генераторами фазовых, орбитальных и спиновых вращений в парно-коррелированной системе являются операторы $-\hbar N/2$, $\mathbf{L}$ (плотности орбитального момента) и $\mathbf{S}$ (ср. с началом этого раздела). Изменение плотности гидродинамической энергии равно

$$d\varepsilon = Tds + \mu d\rho + \mathbf{v}_n d\mathbf{g} + \omega dS + \mathbf{\Omega} d\mathbf{L} + \mathbf{j}^s d\mathbf{v}_s, \qquad (1.122)$$

где S — продольная намагниченность (вдоль магнитного поля), μ — химпотенциал, T — температура жидкости, $\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость, а $\mathbf{j}^s$ — сверхтекучий ток. Из этого выражения получаются такие уравнения движения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\varphi^0 &= -\frac{\partial\varepsilon}{\partial(\hbar N/2)} = -\frac{2\mu m}{\hbar}, && (1.123)\\
\frac{\partial}{\partial t}\vec{\theta}^o &= \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{L}} = \mathbf{\Omega}, && (1.124)\\
\frac{\partial}{\partial t}\vec{\theta}^s &= \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{S}} = \vec{\omega}. && (1.125)
\end{aligned}$$

Угловую скорость жидкости мы считаем нулевой и поэтому в дальнейшем не пишем член, связанный с орбитальным моментом. В результате для сверхтекучей скорости получим уравнение:

$$\dot{\mathbf{v}}_s + \nabla\mu + M_s\frac{\hbar}{2m}\nabla\omega = 0. \qquad (1.126)$$

Наконец, имеется закон сохранения спина (мы выписываем уравнения, пренебрегая диссипацией):

$$\dot{S} + \nabla\left(S\mathbf{v}_n + \mathbf{j}_z^{sp}\right) = 0, \qquad (1.127)$$

где последнее слагаемое есть сверхтекучий спиновый ток.

Уравнения (1.118) и (1.127) удобно переписать через приведенные переменные $\sigma = s/\rho$ и $\xi = S/S_0$, где

$$S_0 = \frac{\hbar\rho}{2m} \tag{1.128}$$

соответствует максимально возможной намагниченности:

$$\rho\dot{\sigma} - \sigma\nabla\mathbf{j}^s = 0, \tag{1.129}$$
$$\rho\dot{\xi} - (\xi - M_s)\nabla\mathbf{j}^s = 0. \tag{1.130}$$

Выпишем также соотношения между плотностью импульса и сверхтекучими токами:

$$\mathbf{g} = \rho\mathbf{v}_n + \mathbf{j}^s, \tag{1.131}$$
$$\mathbf{j}^s = \frac{2m}{\hbar}M_s\mathbf{j}_z^{sp} = \hat{\rho}_s(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n). \tag{1.132}$$

Тензор сверхтекучей плотности $\hat{\rho}_s$ определяется направлением вектора $\mathbf{l}$. Поскольку мы считаем это направление фиксированным, а направление распространения волны также задано (вдоль оси x), мы можем считать сверхтекучую плотность и нормальную плотность $\hat{\rho}_n = \hat{\rho} - \hat{\rho}_s$ скалярами, а не тензорами. Кроме того, A_1-фаза стабильна только в непосредственной близости от перехода в нормальную фазу, в этой области плотность нормальной компоненты очень близка к полной плотности жидкости.

Имеется три моды, описывающие решения гидродинамических уравнений (1.116), (1.117), (1.129), (1.130), (1.126): первый звук, второй звук и диффузионная мода [54, 55, 56]. Если пренебречь [55] перекрестными термодинамическими производными $\partial T/\partial\rho$, $\partial\omega/\partial\rho$, $\partial T/\partial\xi$, возникающими, когда мы выражаем T, ω, μ через независимые переменные ρ, ξ, σ, то эти решения имеют вид для второго звука:

$$\delta\rho = 0, \quad \mathbf{g} = 0, \mathbf{v}_n = -\frac{\rho_s}{\rho_n}\mathbf{v}_s, \quad \mathbf{j}^s = -\rho\mathbf{v}_n, \tag{1.133}$$
$$\delta\sigma = \mp\frac{\sigma}{c_2}v_s\frac{\rho_s}{\rho_n}, \tag{1.134}$$
$$\delta\xi = \mp\frac{\xi - M_s}{c_2}v_s\frac{\rho_s}{\rho_n}, \tag{1.135}$$

Для первого звука имеем:

$$\mathbf{j}^s = 0, \mathbf{v}_n = \mathbf{v}_s, \tag{1.136}$$
$$\delta\sigma = \delta\xi = 0, \qquad \delta P = c_1^2\delta\rho, \qquad \delta\rho = \pm\frac{\rho}{c_1}v_s. \tag{1.137}$$

Знак + или − выбирается в зависимости от того, распространяется волна в положительном или отрицательном направлении оси x. Диффузионная мода описывается формулами

$$\mathbf{g} = 0, \qquad \mathbf{j}^s = 0, \mathbf{v}_n = \mathbf{v}_s = 0, \delta\rho = 0, \qquad \delta P = 0, \tag{1.138}$$
$$\frac{\delta\sigma}{\delta\xi} = M_s\sigma\frac{c_S^2}{c_{2A}^2} = \frac{(\hbar/2m)M_s\partial\omega/\partial\xi}{\sigma\partial T/\partial\sigma}, \tag{1.139}$$

где c_S и c_{2A} — скорости спиновых волн и второго звука в A-фазе.

Скорость первого звука равна

$$c_1^2 = \frac{\partial P}{\partial\rho}, \tag{1.140}$$

ее экспериментальное значение $c_1 \sim 3\cdot 10^4$см/с [59]. Скорость второго звука

$$c_2^2 = \frac{\hbar}{2m}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\frac{\rho_s}{\rho} \tag{1.141}$$

близка к скорости спиновых волн в A-фазе. Это связано с тем, что в A_1-фазе колебания продольной намагниченности и энтропии смешиваются, и спиновые волны диктуют свою высокую скорость распространения гибридизованной моде (именно это облегчает наблюдение волн второго звука в A_1-фазе). Измерения дают $c_2 \sim 10^3\sqrt{1-T/T_c}$ см/с [26]. Скорость же диффузионной моды равна нулю.

В присутствии электрического поля возникает дополнительный вклад в энергию (ср. (1.79)), что приводит к изменению гидродинамических уравнений. Во-первых, изменяется выражение для сверхтекучего тока, который определяется как вариация энергии по сверхтекучей скорости. Мы ниже будем обозначать $\mathbf{j}^{s0}$ производную *невозмущенной* энергии (т.е. энергии в отсутствие спин-орбитального взаимодействия). Тогда полный сверхтекучий ток связан с $\mathbf{j}^{s0}$ соотношением

$$j^s = j^{s0} + M_s\frac{\mu\rho_s}{mc}E. \tag{1.142}$$

Во-вторых, изменяется выражение для давления через остальные переменные, которым нужно воспользоваться, чтобы замкнуть систему уравнений:

$$\nabla P = s\nabla T + \rho\nabla\mu + \mathbf{g}\nabla\mathbf{v}_n + S\nabla\omega - \mathbf{j}^s\nabla\mathbf{v}_s. \tag{1.143}$$

Это изменение, связанное с изменением сверхтекучего тока и величины ω (см. ниже), имеет второй порядок малости по электрическому полю, так как сами колебания возбуждаются полем. Поэтому мы это изменение учитывать не будем. В-третьих, осцилляции электрического поля приводят к возбуждению магнитного поля, т.е. переопределению величины

$$\vec{\omega} = \frac{\gamma^2}{\chi}\mathbf{S} - \gamma\mathbf{H}, \tag{1.144}$$

что в свою очередь также приводит к возбуждению колебаний второго звука. Однако для интересной с точки зрения эксперимента области частот (см. обсуждение ниже) и для разумных параметров экспериментальной установки этот эффект меньше, чем непосредственно от электрического поля.

Итак, мы будем учитывать изменение двух уравнений (1.129) и (1.130), которые принимают вид:

$$\rho\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = \nabla j^{s0} + M_s\frac{\mu\rho_s}{mc}\nabla E, \tag{1.145}$$

$$\rho\frac{\dot{\xi}}{\xi - M_s} = \nabla j^{s0} + M_s\frac{\mu\rho_s}{mc}\nabla E. \tag{1.146}$$

Пользуясь приведенными выше выражениями для амплитуд колебаний различных мод в A_1-фазе, легко увидеть, что электрическое поле приводит к возбуждению волн второго звука, распространяющихся в обе стороны от области, где сосредоточен градиент поля. Значение сверхтекучей скорости в такой волне, скажем, правее этой области дается интегралом

$$v_s(x,t) = \int dy \frac{\mu}{2mc} M_s \nabla E\left(y, t - \frac{x-y}{c_2}\right). \tag{1.147}$$

Если считать, что электрическое поле сосредоточено в области размера r с резкими градиентами на концах, $E(x,t) = E_0\cos(\omega_0 t)\theta((r/2) - |x|)$, то

$$v_s(x) = \frac{\mu E_0}{mc} M_s \sin(\omega_0 t - kx)\sin\left(\frac{kr}{2}\right), \tag{1.148}$$

где $k = \omega_0/c_2$ — волновой вектор, соответствующий частоте колебаний. Таким образом, амплитуда колебаний второго звука может быть доведена до $\mu E_0/mc$.

Из-за того, что перекрестные термодинамические производные, которыми мы пренебрегали выше, отличны от нуля, должны возникать и колебания первого звука. Их амплитуда, однако, чрезвычайно мала.

Оценим амплитуду колебаний в волне второго звука. Для оценок мы примем $E_0 = 30$ кВ/см.

Пересчитывая при помощи формул (1.133), (1.134), (1.135) амплитуду колебаний сверхтекучей скорости в амплитуду колебаний намагниченности, получаем

$$\delta S \cong \frac{\hbar\rho_s}{2mc_2}\frac{\mu E_0}{mc}, \tag{1.149}$$

что соответствует намагниченности во внешнем магнитном поле $H < 10^{-5}$ Гс. Амплитуда колебаний температуры равна $\delta T \sim 10^{-12} T_c$.

Эти амплитуды очень малы, однако их можно увеличить резонансным методом, который, например, использовался при наблюдении волн второго звука в B-фазе [60]. Волны, отраженные от стенок сосуда, интерферируют, и подобрав согласованно частоту внешнего поля и размер сосуда, можно добиться усиления колебаний. Кроме того, затухание второго звука (на единицу длины) пропорционально квадрату частоты [22]: $\alpha = a\omega_0^2$. Поэтому используя низкие частоты, можно добиться высокой добротности резонансной системы.

Если l — размер сосуда в направлении распространения волны, то наименьшая резонансная частота равна $\nu_1 = c_2/(2l)$, а коэффициент резонансного усиления $Q = (\alpha l)^{-1} = 4l/(ac_2^2)$. Используя экспериментальные данные для затухания второго звука в A_1-фазе [26], можно получить оценку $Q \sim 10^5$ для сосуда с размером порядка сантиметра.

Волну второго звука можно регистрировать при помощи так называемых преобразователей для генерации и регистрации второго звука: преобразователя Пешкова, предложенного для изучения второго звука в ^{4}He [61], или преобразователя с проницаемой для сверхтекучей компоненты диафрагмой (Oscillating Superleak Transducer, OST), описанного в работе [62]. Как было показано в работах [63, 64], OST менее эффективен для генерации второго звука, чем преобразователь Пешкова, однако для наших целей — регистрации волны, возбужденной электрическим полем — они одинаково пригодны (см. [63]). Сравнение величины сигнала, вызванного такой волной, с наблюдавшейся при первых измерениях параметров второго звука в A_1-фазе Корручини и Ошеровым [26], с использованием параметров их установки, показывает, что электрическое поле возбуждает колебания, на 2–3 порядка более слабые, чем в [26]. Можно надеяться, что необходимая чувствительность регистрирующего преобразователя может быть достигнута в экспериментах того же типа. Например, можно использовать преобразователи с мембранами, жесткость которых отличается от жесткости мембран, использованных в этом опыте (ср. [60]).

Часть 2.

Спиновая динамика сверхтекучей ферми-жидкости в неоднородных внешних условиях

2.1. Когерентно прецессирующие структуры в сверхтекучем и нормальном ^{3}He

Когерентно прецессирующая двухдоменная структура, описанная в предыдущей главе, возникает благодаря сверхтекучему спиновому току [6]. Возможность протекания сверхтекучего спинового тока, т.е. тока намагниченности, без переноса массы, связана с нетривиальной спиновой структурой параметра порядка.

После отклонения импульсом поперечного поля в экспериментах по импульсному ЯМР намагниченность и параметр порядка начинают прецессировать согласно уравнениям Леггетта (1.14), (1.15). Из-за неоднородности внешнего магнитного поля частота такой прецессии меняется в пределах сосуда, что со временем приводит к появлению разности фаз прецессии в разных точках. В результате возникают градиенты параметра порядка и сверхтекучий спиновый ток. В случае B-фазы ток P-компоненты намагниченности (полный интеграл которой по объему сохраняется, [6]) приводит к перераспределению ее плотности в сосуде. В результате образуется двухдоменная структура: в одном из доменов намагниченность вдоль поля максимальна ($P = 0$, непрецессирующий домен), а в другом — минимальна в классе решений, описываемых формулой (1.25), (1.26).

В результате диссипации (вызванной спиновой диффузией и механизмом Леггетта-Такаги, см. ниже) прецессирующая структура теряет энергию. Так как изменение абсолютной величины намагниченности в сверхтекучем ^{3}He приводит к сильному увеличению дипольной энергии, то в процессе релаксации модуль намагниченности сохраняется, и релаксация состоит в том, что доменная стенка движется в сторону слабых полей, увеличивая равновесный домен. Поскольку частота прецессии совпадает с локальной ларморовской частотой в месте, где расположена стенка (рис.1.4), частота прецессии в процессе релаксации падает [6].

Недавно была открыта долгоживущая когерентно прецессирующая спиновая структура и в нормальной ферми-жидкости: в смеси ^{3}He-^{4}He [65, 13] и в нормальном ^{3}He [14]. Эта структура существует в бесстолкновительной области $\omega\tau > 1$ (τ — время релаксации квазичастиц). Она возникает благодаря бездиссипативному спиновому току [13], обусловленному ферми-жидкостным взаимодействием. Влияние ферми-жидкостных эффектов на динамику спиновой плотности можно представлять себе так: возникновение отличной от нуля намагниченности ферми-жидкости приводит к появлению молекулярного магнитного поля. Это поле не вызывает прецессии самой намагниченности, т.к. оно параллельно ей, однако оно приводит к прецессии спинового тока вокруг своего направления. В свою очередь спиновый ток влияет на плотность спина через уравнение непрерывности.

Исследование когерентной прецессии в нормальной ферми-жидкости [13] опирается на уравнения Леггетта [16] для спиновой динамики нормальной жидкости, выведенные им на основе кинетического уравнения в предположении, что характерный размер неоднородности λ велик по сравнению с v_F/ω:

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{J}_i}{\partial x_i} = \mathbf{S} \times \vec{\omega}_L, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{J}_i}{\partial t} + \frac{w^2}{3}\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_i} = \mathbf{J}_i \times \vec{\omega}_L + \kappa \frac{\gamma^2}{\chi}\mathbf{J}_i \times \mathbf{S} - \frac{\mathbf{J}_i}{\tau_1}. \tag{2.2}$$

Здесь $\mathbf{S}$, как и выше, обозначает плотность спина, $\mathbf{J}_i$ — плотность спинового тока, ω_L — ларморовская частота внешнего поля, и введены сокращенные обозначения для величин, включающих ферми-жидкостные параметры: $w^2 = v_F^2(1 + F_0^a)(1 + F_1^a/3)$, $\kappa = (F_1^a/3 - F_0^a)/(1 + F_0^a)$, $\tau_1 = \tau/(1 + F_1^a/3)$. F_0^a и F_1^a — коэффициенты разложения по гармоникам спин-спиновой части функции взаимодействия квазичастиц (см. (1.48), (1.49), (1.65)).

Пользуясь уравнениями (2.1), (2.2) можно показать [16], что ферми-жидкостные эффекты приводят к бездиссипативному вкладу в ток, который в бесстолкновительной области имеет вид

$$\mathbf{J}_i \leftarrow \frac{w^2}{3\kappa}\frac{\chi}{\gamma^2}\hat{\mathbf{S}} \times \nabla_i \hat{\mathbf{S}}, \tag{2.3}$$

где $\hat{\mathbf{S}}$ — единичный вектор вдоль намагниченности (в бесстокновительной области этот вклад превосходит диффузионный спиновый ток). Благодаря этому вкладу в ток и возникает когерентно прецессирующая структура в нормальной жидкости в бесстолкновительном режиме. После отклонения намагниченности от равновесного значения в импульсном ЯМР начинается прецессия вокруг магнитного поля. Как и в сверхтекучем ^{3}He-B, неоднородность поля приводит к возникновению градиентов намагниченности, а значит, к появлению спинового тока (2.3). Этот ток переносит продольную компоненту намагниченности вдоль оси $\hat{z}$, в результате чего образуются два домена (рис.2.1): в одном из них продольная компонента намагниченности максимальна (намагниченность вдоль поля), а в другом — минимальна (намагниченность против поля). Относительное расположение доменов (какой из них находится в области сильных полей, а какой — в области слабых) определяется направлением тока, т.е. знаком κ. В ^{3}He $\kappa > 0$, и равновесный домен расположен в области слабых полей. Двухдоменная структура прецессирует с частотой ω_P, совпадающей с локальной ларморовской частотой в точках стенки (рис.2.1).

Учет релаксации приводит к потере энергии со временем. В нормальной жидкости дипольная энергия отсутствует, поэтому, с одной стороны, сохраняется продольная компонента спина, а с другой стороны, плотность спина может менять свое абсолютное значение. Релаксация прецессирующей структуры в нормальной жидкости происходит иначе, чем в сверхтекучей [13, 66]: со временем уменьшается модуль намагниченности в обоих доменах, а размеры доменов меняются таким образом, чтобы сохранялась полная продольная намагниченность. Если в начальном состоянии равновесный домен был больше неравновесного, то со временем он будет расти, а значит, будет расти и частота прецессии, совпадающая с локальной ларморовской частотой на стенке.

В связи с тем, что при температурах ниже приблизительно $0.8T_c$ в ^{3}He-B и при температурах выше T_c (в нормальном ^{3}He) образуются различные когерентно прецессирующие структуры, интересен вопрос о том, что происходит в сверхтекучей жидкости вблизи температуры перехода. Поставленные эксперименты [14, 15] показывают, что когерентно прецессирующая структура с большим временем жизни образу-

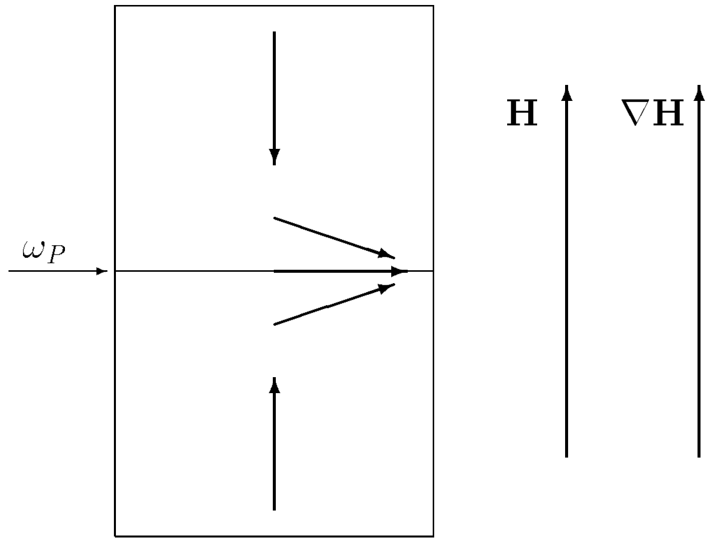


Рис. 2.1. Двухдоменная прецессирующая структура в нормальной ферми-жидкости. При прохождении сквозь доменную стенку намагниченность плавно изменяется. Внутри стенки она прецессирует с частотой ω_P.

ется и в некотором интервале температур вблизи T_c (до $0.95T_c$), однако изменяется величина сигнала индукции и характер релаксации.

Возникает необходимость теоретического исследования спиновой динамики сверхтекучей ферми-жидкости в бесстолкновительной области, однако соответствующие уравнения до сих пор не были получены и исследованы.

С одной стороны, существовали уравнения Леггетта для *нормальной* жидкости в бесстолкновительном режиме [16]. С другой стороны, спиновая *гидродинамика* сверхтекучей жидкости описывается уравнениями Леггетта [17, 32], которые перестают работать при переходе к высоким частотам, т.е. в бесстолкновительную область $\omega\tau > 1$. В этой области нормальная компонента (боголюбовские возбуждения) не находится в равновесии с конденсатом, и для описания ее динамики нужны дополнительные уравнения. Соответствующая теория двухжидкостной спиновой динамики была развита Леггеттом и Такаги [18]. Уравнения Леггетта и Такаги представляют собой уравнения движения параметра порядка, спина конденсата $\mathbf{S}_p$ и спина нормальной компоненты $\mathbf{S}_q$. Вместо уравнений на $\mathbf{S}_p$ и $\mathbf{S}_q$ удобно писать уравнения на полную спиновую плотность $\mathbf{S}$ и величину $\vec{\eta} = \mathbf{S}_p - \lambda_0\mathbf{S}$, характеризующую отклонение от взаимного равновесия между спинами конденсата и возбуждений:

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \times \vec{\omega}_L + \mathbf{R}_D, \tag{2.4}$$

$$\dot{\vec{\eta}} = \vec{\eta} \times \left(\vec{\omega}_L - \frac{\gamma^2}{\chi_{n0}} F_0^a \mathbf{S} \right) + (1 - \lambda_0)\mathbf{R}_D - \vec{\eta}/\tau, \tag{2.5}$$

$$\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{d} \times \left(\vec{\omega}_L - \frac{\gamma^2}{\chi} \mathbf{S} + \frac{\gamma^2}{\chi_{p0}} \vec{\eta} \right). \tag{2.6}$$

Здесь $\lambda_0 = \chi_{p0}/\chi_0$, восприимчивости нормальной, сверхтекучей жидкости и конденсата без учета ферми-жидкостных поправок обозначены соответственно χ_{n0}, χ_0, χ_{p0}, а вектор $\mathbf{d}(\mathbf{k})$ описывает сверхтекучий параметр порядка.

Однако уравнения Леггетта-Такаги описывают спиновую динамику только в *однородном* случае. В этой части мы получим обобщение этих уравнений на случай неоднородных распределений, а затем в интересующей нас области температур вблизи T_c путем выделения наиболее существенных членов получим приближенные уравнения, которые могут быть использованы для аналитического и численного исследования возникающих структур. Кроме того, мы получим решение этих уравнений, описывающее когерентно прецессирующую двухдоменную структуру: оказывается, что в той области, где уже существенна энергия диполь-дипольного взаимодействия, может существовать двухдоменная структура, аналогичная существующей в нормальной ферми-жидкости.

Результаты этой части опубликованы в работе [67].

2.2. Вывод основных уравнений

Система уравнений Леггетта спиновой динамики сверхтекучего ^{3}He в локальном равновесии состоит из уравнения эволюции полного спина и уравнения движения параметра порядка. В общем (негидродинамическом) случае нормальная компонента не находится в равновесии с конденсатом, и для ее описания требуется кинетическое уравнение. Удобно писать кинетическое уравнение для боголюбовских квазичастиц, считая состояние конденсата внешним параметром.

Для ^{4}He такой подход был развит Андреевым и Халатниковым [68]. В этом случае конденсат описывается сверхтекучей скоростью, химическим потенциалом и модулем щели. Для ферми-систем этот подход применялся Бетбедером-Матибэ и Нозьером [69], которые показали, что такое двухжидкостное описание естественным образом возникает при совершении калибровочного преобразования, компенсирующего неоднородность параметра порядка (см. ниже). Позднее этот подход был использован П. Вёлфле [70] при исследовании нулевого звука в анизотропной жидкости, тоже для случая s-спаривания. Комбеско [71] развил соответствующий формализм для случая триплетного p-спаривания. Пользуясь этим формализмом, мы выведем уравнения спиновой динамики.

В дальнейшем мы будем использовать кинетическое уравнение для боголюбовских квазичастиц. Чтобы объяснить его происхождение и ввести обозначения, опишем коротко его вывод [71].

Мы ограничимся рассмотрением движений с частотами, малыми по сравнению с величиной самого параметра порядка $\omega \ll \Delta$, и с характерным масштабом изменения величин, больши́м по сравнению с длиной когерентности. Поскольку искажение формы параметра порядка требует энергий порядка Δ, такое ограничение приводит к тому, что параметр порядка не искажается, и его пространственно-временные изменения сводятся к движению по вырожденному минимуму свободной энергии, соответствующему данной фазе (ср. раздел 1.1), т.е. к фазовым, спиновым и орбитальным вращениям. Изменения фазы связаны с динамикой плотности жидкости и массовыми токами, и интересуясь спиновой динамикой, мы будем предполагать, что они отсутствуют. Что касается орбитальных вращений, то в B-фазе они эквивалентны спиновым. Поэтому достаточно рассматривать только спиновые вращения. В действительности, в случае A-фазы орбитальная динамика заморожена из-за большой “орбитальной вязкости” [58], поэтому рассмотрением спиновых вращений можно ограничиться и в этом случае.

Итак, мы считаем, что параметр порядка только поворачивается в спиновом пространстве. Поэтому пространственно-временные изменения параметра порядка можно скомпенсировать, совершив калибровочное преобразование — локальный спиновый поворот, который состоит в переходе от старых операторов рождения фермионов $\psi_\alpha(\mathbf{r}, t)$ к новым $\phi_\alpha(\mathbf{r}, t)$:

$$\psi_\alpha(\mathbf{r}, t) = \left[\exp(i\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\theta}(\mathbf{r}, t))\right]_{\alpha\beta} \phi_\beta(\mathbf{r}, t), \tag{2.7}$$

причем вещественный вектор $\vec{\theta}$ подбирается таким образом, чтобы параметр порядка, составленный из новых переменных ϕ_α, не зависел от координат и времени. Это преобразование относится к той группе калибровочных преобразований, о которой шла речь в разделе 1.5. Его можно рассматривать как переход (для спиновых величин) к другой системе координат, связанной с параметром порядка. Таким образом, ниже, при выводе уравнений в этой системе координат, вектор $\mathbf{d}(\mathbf{k})$ параметра порядка не приходится дифференцировать. В случае B-фазы, который мы рассматриваем, новая система координат получается из обычной поворотом при помощи матрицы $R_{\alpha i}$.

Из-за калибровочного преобразования временные и пространственные производные удлиняются (см. (2.38) и (2.39) ниже, ср. также [12]), и в получающиеся уравнения входят соответствующие калибровочные поля [71]:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}\hat{\vec{\sigma}} &= -i\exp\left(-i\hat{\vec{\sigma}}\vec{\theta}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left[\exp\left(i\hat{\vec{\sigma}}\vec{\theta}\right)\right], && (2.8)\\ \mathbf{A}_i\hat{\vec{\sigma}} &= -\frac{i}{m^*}\exp\left(-i\hat{\vec{\sigma}}\vec{\theta}\right)\nabla_i\left[\exp\left(i\hat{\vec{\sigma}}\vec{\theta}\right)\right], && (2.9)\end{aligned}$$

или, для B-фазы,

$$\begin{aligned} V^\alpha &= -\frac{1}{4}e_{\alpha\beta\gamma}R_{\beta j}\frac{\partial}{\partial t}R_{\gamma j}, && (2.10)\\ A_{\alpha i} &= -\frac{1}{4m^*}e_{\alpha\beta\gamma}R_{\beta j}\nabla_i R_{\gamma j}. && (2.11)\end{aligned}$$

Здесь приведены компоненты векторов $\mathbf{V}$ и $\mathbf{A}_i$ в лабораторной системе отсчета[1] (а в формулах (1.86), (1.87) — в повернутой системе отсчета). Эти величины, являющиеся спиновыми аналогами химического потенциала и сверхтекучей скорости, связаны "уравнением Джозефсона":

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}_i = \frac{1}{m^*}\nabla_i\mathbf{V} + 2\mathbf{A}_i\times\mathbf{V}. \qquad (2.12)$$

Появление последнего члена является следствием неабелевости калибровочной группы — группы спиновых вращений. Как и в [71], мы будем учитывать дальше только нулевую гармонику функции ферми-жидкостного взаимодействия квазичастиц F_0^a, и определим величину

$$\mathbf{X} = \mathbf{V} - \frac{1}{2}\vec{\omega}_L + \frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\chi_{n0}}F_0^a\mathbf{S}. \qquad (2.13)$$

Кинетическое уравнение представляет собой уравнение на функцию распределения, матрицу 4×4:

$$n_{kk'} = \begin{pmatrix} \langle a^+_{k\alpha}a_{k'\beta}\rangle & \langle a^+_{k\alpha}a^+_{-k'\beta}\rangle \\ \langle a_{-k\alpha}a_{k'\beta}\rangle & \langle a_{-k\alpha}a^+_{-k'\beta}\rangle \end{pmatrix}, \qquad (2.14)$$

и имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}n = [n,\varepsilon]. \qquad (2.15)$$

[1] Калибровочное поле $\mathbf{A}_i$ связано с величиной $\omega_{\alpha i}$ (1.37) соотношением $A_{\alpha i} = -(1/2m^*)\omega_{\alpha i}$.

Оператор энергии квазичастиц ε в отсутствие возмущений

$$\varepsilon_k = \begin{pmatrix} \xi_k \delta_{\alpha\beta} & \Delta^+_{k,\alpha\beta} \\ \Delta_{k,\alpha\beta} & -\xi_{-k}\delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

в результате калибровочного преобразования изменяется: к величине $\xi_k \delta_{\alpha\beta} \cong v_F(k-k_F)\delta_{\alpha\beta}$ в предыдущем выражении возникает добавка

$$M_{k,\alpha\beta} = (k_i \mathbf{A}_i + \mathbf{V})\vec{\sigma}_{\alpha\beta}. \tag{2.17}$$

В случае сверхтекучей системы кинетическое уравнение приобретает более простой вид, если (после калибровочного преобразования) совершить преобразование Боголюбова, диагонализующее оператор энергии (2.16). При этом функция распределения (и, аналогично, оператор энергии квазичастиц) заменяется на

$$\nu_k = U_k n_k U_k^+, \tag{2.18}$$

где унитарная матрица U_k выбирается в виде

$$U_k = \begin{pmatrix} u_k & v_k \\ -v_k^+ & u_k \end{pmatrix}, \tag{2.19}$$

а матрицы u_k и v_k таковы:

$$u_{k,\alpha\beta} = [(E+\xi)/2E]^{1/2}\delta_{\alpha\beta}, \tag{2.20}$$
$$v_{k,\alpha\beta} = \Delta^+_{k,\alpha\beta}/[2E(E+\xi)]^{1/2}. \tag{2.21}$$

Здесь $E=\sqrt{\Delta^2+\xi^2}$ — энергия боголюбовских возбуждений.

После боголюбовского преобразования уравнение на диагональные по индексу частица-дырка компоненты отделяется. Так как мы интересуемся спиновой динамикой, то мы оставляем только симметричную по спиновым индексам часть функции распределения квазичастиц $\delta\vec{\nu}_k(\mathbf{r},t)\hat{\vec{\sigma}}^T$, и кинетическое уравнение (в системе отсчета, определяемой поворотом параметра порядка) приобретает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\vec{\nu} + \frac{\xi}{E}(\mathbf{v}_F\nabla)\delta\vec{\mu} + \frac{2}{\hbar}\delta\vec{\nu}\times\delta\vec{E} = \vec{I}(\delta\vec{\nu}). \tag{2.22}$$

Здесь $\delta\vec{E}$ — изменение (спиновой части) локальной энергии квазичастиц из-за внешнего и молекулярного магнитного поля и конденсата:

$$\frac{1}{\hbar}\delta\vec{E} = k_i\mathbf{A}_i + \frac{\xi}{E}\mathbf{X} - \left(1-\frac{\xi}{E}\right)\hat{\mathbf{d}}(\hat{\mathbf{d}}\cdot(k_i\mathbf{A}_i - \mathbf{X})), \tag{2.23}$$

где $\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{k})$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{d}(\mathbf{k})$. Это изменение энергии приводит к изменению локально равновесного значения функции распределения, отклонение от которого и входит в кинетическое уравнение:

$$\delta\vec{\mu} = \delta\vec{\nu} - \varphi'\delta\vec{E}, \tag{2.24}$$

где $\varphi(E) = -\frac{1}{2}\operatorname{th}(E/2T)$, $\varphi' = \partial\varphi/\partial E$.

Выражения для плотностей спина и спинового тока в указанной выше системе координат, определяемой мгновенным значением параметра порядка, получающиеся в результате преобразования, таковы:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \hbar\sum_k \left[\frac{\xi}{E}\delta\vec{\nu} + \left(1-\frac{\xi}{E}\right)\hat{\mathbf{d}}(\hat{\mathbf{d}}\delta\vec{\nu})\right] \qquad (2.25) \\ &+\hbar^2\sum_k \frac{\varphi\Delta^2}{E^3}\hat{\mathbf{d}}\times(\mathbf{X}\times\hat{\mathbf{d}}), \\ \mathbf{J}_i &= \hbar\sum_k v_{Fi}\left[\delta\vec{\nu} - \left(1-\frac{\xi}{E}\right)\hat{\mathbf{d}}(\hat{\mathbf{d}}\delta\vec{\nu})\right] \qquad (2.26) \\ &+\hbar^2\sum_k \frac{\varphi\Delta^2}{E^3}v_{Fi}k_j\hat{\mathbf{d}}(\hat{\mathbf{d}}\mathbf{A}_j) + \hbar S_0\mathbf{A}_i, \end{aligned}$$

где $S_0 = \hbar n/2$ — максимальная спиновая плотность, n — плотность жидкости. Первые слагаемые в правых частях этих выражений содержат вклад в спиновую плотность и спиновый ток от изменения числа боголюбовских квазичастиц, а вторые слагаемые — вклад от изменения состояний куперовских пар. В соответствии с этим мы определим спин квазичастиц $\mathbf{S}_q$ как первое слагаемое в (2.25):

$$\mathbf{S}_q = \hbar\sum_k \left[\frac{\xi}{E}\delta\vec{\nu} + \left(1-\frac{\xi}{E}\right)\hat{\mathbf{d}}(\hat{\mathbf{d}}\delta\vec{\nu})\right], \tag{2.27}$$

и спин конденсата $\mathbf{S}_p$ как второе слагаемое (ср. [18, 71]):

$$\mathbf{S}_p = \hbar^2\sum_k \frac{\varphi\Delta^2}{E^3}\hat{\mathbf{d}}\times(\mathbf{X}\times\hat{\mathbf{d}}). \tag{2.28}$$

Отметим, что в локальном равновесии ($\delta\vec{\mu} = 0$)

$$\mathbf{S}_q = \frac{\chi_{q0}}{\gamma^2}(-2\mathbf{X}), \quad \mathbf{S}_p = \frac{\chi_{p0}}{\gamma^2}(-2\mathbf{X}), \quad \mathbf{S} = \frac{\chi_0}{\gamma^2}(-2\mathbf{X}), \tag{2.29}$$

где восприимчивости квазичастиц, конденсата и жидкости в целом, без учета ферми-жидкостных поправок, равны

$$\chi_{q0} = \frac{2Y_2 + Y_0}{3}\chi_{n0}, \tag{2.30}$$

$$\chi_{p0} = \frac{2}{3}(1 - Y_2)\chi_{n0}, \tag{2.31}$$

$$\chi_0 = \frac{2 + Y_0}{3}\chi_{n0}. \tag{2.32}$$

Обычная функция Иосида Y_0 определена в (1.69), а модифицированная Y_2 задается формулой:

$$Y_2 = \int \left(\frac{\xi}{E}\right)^2 \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial E}\right) d\xi. \tag{2.33}$$

Обе эти функции равны 1 в нормальной фазе и меняются от 1 до 0 при уменьшении температуры от T_c до нуля.

Что касается выражения для спинового тока, удобно выделить в нем слагаемое, представляющее собой ток в локальном равновесии

$$J^{loc}_{\alpha i} = \rho^s_{\alpha i,\beta j} A_{\beta j}, \tag{2.34}$$

и слагаемое, соответствующее отклонению тока от равновесного

$$\delta \mathbf{J}_i = \hbar \sum_k v_{Fi} \left[\delta\vec{\mu} - \left(1 - \frac{\xi}{E}\right) \hat{\mathbf{d}}(\hat{\mathbf{d}}\delta\vec{\mu})\right]. \tag{2.35}$$

Таким образом,

$$\mathbf{J}_i = \mathbf{J}^{loc}_i + \delta\mathbf{J}_i. \tag{2.36}$$

Выражение для сверхтекучей спиновой плотности

$$\rho^s_{\alpha i,\beta j} = \hbar S_0(1 - Y_0)\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} - \frac{1}{5}P_{\alpha i,\beta j}\right) \tag{2.37}$$

получается после подстановки $\delta\vec{\nu} = \varphi'\delta\vec{E}$ в (2.26) и вычисления сумм по импульсам. В нормальной фазе $\rho^s_{\alpha i,\beta j}$ обращается в ноль, поэтому в пределе $T \to T_c$ ток $\delta\mathbf{J}_i$ переходит в полный спиновый ток нормальной жидкости. Напомним определение тензора P (1.68):

$$P_{\alpha i,\beta j} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} + R_{\alpha i}R_{\beta j} + R_{\alpha j}R_{\beta i} = 15 \cdot \left\langle n_i n_j \hat{\mathbf{d}}_\alpha \hat{\mathbf{d}}_\beta \right\rangle_{\mathbf{n}}.$$

Дифференцируя $\mathbf{S}_q$ и $\delta\mathbf{J}_i$ по времени в соответствии с кинетическим уравнением (2.22) и выделяя в производной члены, соответствующие этим же величинам, получаем два уравнения спиновой динамики. Переход в окончательных уравнениях к лабораторной системе координат сводится к замене временных и пространственных производных по правилу[2]

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{W} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{W}+2\mathbf{V}\times\mathbf{W}, &(2.38)\\ \nabla_i\mathbf{W} &\rightarrow \nabla_i\mathbf{W}+2m^*\mathbf{A}_i\times\mathbf{W}, &(2.39)\end{aligned}$$

где $\mathbf{W}$ — вектор в спиновом пространстве, а в правой части стоят его компоненты уже в лабораторной системе. Если производная действует на матрицу по спиновым индексам, то нужно добавить свертку, соответствующую векторному произведению, по каждому индексу:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}D_{\alpha\beta} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}D_{\alpha\beta}+2e_{\alpha\mu\nu}V^\mu D_{\nu\beta}+2e_{\beta\mu\nu}V^\mu D_{\alpha\nu}, &(2.40)\\ \nabla_iD_{\alpha\beta} &\rightarrow \nabla_iD_{\alpha\beta}+2m^*e_{\alpha\mu\nu}A_{\mu i}D_{\nu\beta}+2m^*e_{\beta\mu\nu}A_{\mu i}D_{\alpha\nu}. &(2.41)\end{aligned}$$

В результате получим следующие уравнения (см. Приложение А):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{S}_q &= \mathbf{S}_q\times\left(\vec{\omega}_L-\frac{\gamma^2}{\chi_{n0}}F_0^a\mathbf{S}\right)-\nabla_i\delta\mathbf{J}_i+\frac{Y_0-Y_2}{1-Y_0}\nabla_i\mathbf{J}_i^{loc} &(2.42)\\ &+2\mathbf{B}\times\mathbf{X}+e_{\alpha\beta\gamma}\nabla_iD^i_{\beta\gamma}-2m^*D^i_{\beta\alpha}A_{\beta i}-\frac{\mathbf{S}_q-(1-\lambda_0)\mathbf{S}}{\tau},\\ \frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{J}_i &= \delta\mathbf{J}_i\times\left(\vec{\omega}_L-\frac{\gamma^2}{\chi_{n0}}F_0^a\mathbf{S}\right)-\frac{v_F^2}{3}\nabla_i\mathbf{S}_q &(2.43)\\ &+\frac{\hbar S_0}{2m^*}Y_2\nabla_i\left(\vec{\omega}_L-\frac{\gamma^2}{\chi_{n0}}F_0^a\mathbf{S}\right)\\ &+2\frac{Y_0-Y_2}{1-Y_0}\mathbf{J}_i^{loc}\times\mathbf{X}+\frac{1}{m^*}\frac{Y_0-Y_2}{1-Y_0}\rho^s_{\alpha i,\beta j}\nabla_jV^\beta\\ &+2D^i_{\beta\alpha}X_\beta+\mathbf{\Gamma}_i+\frac{v_F^2}{3}\left(\nabla_i+2m^*\mathbf{A}_i\times\right)\mathbf{B}-\frac{\delta\mathbf{J}_i}{\tau_1},\end{aligned}$$

Для удобства часть членов в уравнениях (2.42), (2.43) выписана в векторном виде, а часть — покомпонентно. При этом подразумевается, что у векторов нужно взять α-ю компоненту в спиновом пространстве. Мы ввели следующие обозначения для величин, выражающихся через функцию распределения квазичастиц:

$$\mathbf{B}=\hbar\sum_k\left(1-\frac{\xi^2}{E^2}\right)\hat{\mathbf{d}}(\hat{\mathbf{d}}\delta\vec{\nu}), \tag{2.44}$$

$$D^i_{\alpha\beta}=\hbar\sum_k v_{Fi}\left(1-\frac{\xi^2}{E^2}\right)(\hat{\mathbf{d}}\times\delta\vec{\nu})_\alpha\hat{\mathbf{d}}_\beta, \tag{2.45}$$

[2]Это правило следует из определения калибровочного преобразования (2.7).

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Gamma}_i &= -\hbar v_F^2 \nabla_j \sum_k (n_i n_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}) \left[\frac{\xi}{E}\delta\vec{\nu} + \left(1 - \frac{\xi}{E}\right) \hat{\mathbf{d}}(\hat{\mathbf{d}}\delta\vec{\nu}) \right] \qquad (2.46)\\
&+\hbar v_F^2 (\nabla_j + 2m^* \mathbf{A}_j \times) \sum_k (n_i n_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}) \hat{\mathbf{d}}(\hat{\mathbf{d}}\delta\vec{\nu}) \left(1 - \frac{\xi^2}{E^2}\right).
\end{aligned}
$$

При переходе в нормальную фазу $\mathbf{B}$ и $D^i_{\alpha\beta}$ исчезают из-за множителя $\left(1 - \frac{\xi^2}{E^2}\right)$, а величина $\mathbf{\Gamma}$ также из-за того, что при условии $v_F/\lambda\omega \ll 1$ функция распределения имеет только нулевую и первую гармоники по $\mathbf{k}$ [16] (см. также Приложение В).

Последний член в уравнении (2.42) отражает релаксацию Леггетта-Такаги спиновой плотности нормальной и сверхтекучей компоненты к взаимному равновесию [18]. Плотность спинового тока релаксирует к локально равновесному значению, задаваемому мгновенным значением $\mathbf{A}_i$ (последний член в (2.43)). Такой вид релаксационных членов обсуждается в Приложении Б.

Помимо уравнений на спин нормальной компоненты и неравновесный спиновый ток, для описания спиновой динамики нужны уравнения на спин конденсата $\mathbf{S}_p$ и гидродинамический ток $\mathbf{J}_i^{loc}$. Последний однозначно связан со сверхтекучей спиновой скоростью (2.34), временная производная которой определяется "уравнением Джозефсона" (2.12). Что касается спиновой плотности, то, имея уже уравнение на спин квазичастиц, мы вместо уравнения на спин конденсата можем выписать уравнение на полный спин жидкости (ср. [71]). Это уравнение эволюции спина имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{S} = \mathbf{S} \times \vec{\omega}_L - \nabla_i \mathbf{J}_i + \mathbf{R}_D. \qquad (2.47)$$

Уравнение движения параметра порядка следует из определения вектора $\mathbf{V}$ (2.10):

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{d} = 2\mathbf{d} \times \mathbf{V}. \qquad (2.48)$$

Для облегчения сравнения наших уравнений с уравнениями Леггетта для нормальной жидкости [16] и уравнениями Леггетта-Такаги [18] перейдем от уравнений движения для $\mathbf{S}_q$ и $\delta\mathbf{J}_i$ к уравнениям для полного спинового тока $\mathbf{J}_i$ и величины $\vec{\eta}$. Уравнение для $\vec{\eta} = (1 - \lambda_0)\mathbf{S} - \mathbf{S}_q$ получается комбинацией уравнений (2.42) и (2.47) (здесь

$$\lambda_0 = \frac{\chi_{p0}}{\chi_0} = \frac{2(1 - Y_2)}{2 + Y_0} \qquad (2.49)$$

есть доля полного спина, которая приходится на сверхтекучую компоненту в равновесии), а для вывода уравнения для полного тока нужно также вычислить производную равновесного тока $J^{loc}_{\alpha i} = \rho^s_{\alpha i,\beta j} A_{\beta j}$, дифференцируя $\mathbf{A}_i$ при помощи (2.12) и переходя затем в лабораторную систему:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{J}^{loc}_i = 2\mathbf{J}^{loc}_i \times \mathbf{V} + \frac{1}{m^*}\rho^s_{\alpha i,\beta j}\nabla_j V^\beta. \tag{2.50}$$

В результате вычислений получаем уравнения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\vec{\eta} &= \vec{\eta}\times\left(\vec{\omega}_L - \frac{\gamma^2}{\chi_{n0}}F^a_0\mathbf{S}\right) + (1-\lambda_0)\mathbf{R}_D \qquad (2.51)\\
&+\lambda_0\nabla_i\mathbf{J}_i - \frac{1-Y_2}{1-Y_0}\nabla_i\mathbf{J}^{loc}_i\\
&-2\mathbf{B}\times\mathbf{X} - e_{\alpha\beta\gamma}\nabla_i D^i_{\beta\gamma} + 2m^* D^i_{\beta\alpha}A_{\beta i} - \frac{\vec{\eta}}{\tau},\\
\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{J}_i &= \mathbf{J}_i\times\left(\vec{\omega}_L - \frac{\gamma^2}{\chi_{n0}}F^a_0\mathbf{S}\right) - \frac{v_F^2}{3}\left(1+\frac{2+Y_2}{3}F^a_0\right)\nabla_i\mathbf{S} \qquad (2.52)\\
&+\frac{\hbar S_0}{2m^*}\frac{2+Y_2}{3}\nabla_i\vec{\omega}_L + v_F^2\frac{\chi_{p0}}{\gamma^2}\left\{\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} - \frac{1}{5}P_{\alpha i,\beta j}\right\}\nabla_j V^\beta\\
&+2m^* v_F^2\frac{\chi_{p0}}{\gamma^2}\left\{\delta_{\beta\gamma}\delta_{ij} - \frac{1}{5}P_{\beta i,\gamma j}\right\}e_{\alpha\beta\nu}A_{\gamma j}X_\nu + \frac{v_F^2}{3}(\nabla_i + 2m^*\mathbf{A}_i\times)\mathbf{B}\\
&+2D^i_{\beta\alpha}X_\beta + \mathbf{\Gamma}_i - \frac{\mathbf{J}_i - \rho^s_{\alpha i,\beta j}A_{\beta j}}{\tau_1}.
\end{aligned}$$

Уравнения (2.47), (2.48), (2.51) и (2.52) вместе с определениями (2.11), (2.13) величин $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{X}$ представляют собой систему уравнений неоднородной спиновой динамики сверхтекучей ферми-жидкости.

Эта система, однако, не является замкнутой, т.к. она содержит величины $\mathbf{B}$, $D^i_{\alpha\beta}$, $\mathbf{\Gamma}_i$, для которых, в принципе, нужно писать собственные уравнения эволюции, но в эти уравнения войдут новые величины, выражающиеся через функцию распределения боголюбовских квазичастиц. Придется добавить уравнения движения новых величин и т.д. В результате получится бесконечная система уравнений.

Чтобы избежать этого, можно воспользоваться феноменологическим подходом Леггетта и Такаги [18], согласно которому (в однородном случае) отклонение функции распределения от равновесия описывается одной переменной $\mathbf{S}_q$. Функция распределения при этом задается формулой

$$\delta\vec{\nu} = \varphi'\delta\vec{E}_q, \tag{2.53}$$

где

$$\frac{\delta\vec{E}_q}{\hbar} = \frac{\xi}{E}\mathbf{X}^q + \left(1-\frac{\xi}{E}\right)\hat{\mathbf{d}}(\hat{\mathbf{d}}\mathbf{X}^q) \tag{2.54}$$

и величина $\mathbf{X}^q$ такова, что спин квазичастиц, вычисленный по формуле (2.27), равен $\mathbf{S}_q$:

$$\mathbf{S}_q = \frac{\chi_{q0}}{\gamma^2}(-2\mathbf{X}^q). \tag{2.55}$$

В связи с тем, что мы изучаем неоднородный случай, нам следует добавить к $\mathbf{S}_q$ переменную $\delta\mathbf{J}_i$ или связанный с ней ток квазичастиц:

$$\mathbf{J}_i^q = \hbar \sum_k v_{Fi}\left[\delta\vec{\nu} - \left(1 - \frac{\xi}{E}\right)\hat{\mathbf{d}}(\hat{\mathbf{d}}\delta\vec{\nu})\right] = \rho^q_{\alpha i,\beta j}A_{\beta j} + \delta\mathbf{J}_i, \tag{2.56}$$

где

$$\rho^q_{\alpha i,\beta j} = -\hbar S_0\left(Y_0\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} - \frac{Y_0 - Y_2}{5}P_{\alpha i,\beta j}\right). \tag{2.57}$$

$\mathbf{S}_q$ и $\mathbf{J}_i^q$ и задают функцию распределения. Обобщением формулы (2.53) на неоднородный случай является предположение, что функция распределения описывается выражением

$$\delta\vec{\nu} = \hbar\varphi'\left(\frac{\xi}{E}\mathbf{X}^q + k_i\mathbf{A}_i^q - \left(1 - \frac{\xi}{E}\right)\hat{\mathbf{d}}\left(\hat{\mathbf{d}}\cdot(k_i\mathbf{A}_i^q - \mathbf{X}^q)\right)\right). \tag{2.58}$$

$\mathbf{A}_i^q$ и $\mathbf{X}^q$ при этом заданы условием того, чтобы при подстановке (2.58) в выражения (2.27), (2.56) получались правильные значения $\mathbf{S}_q$ и $\mathbf{J}_i^q$. Для четной по импульсам части функции распределения это дает тот же результат (2.55), что и в однородном случае, а для $\mathbf{A}_i^q$ имеем:

$$J^q_{\alpha i} = \rho^q_{\alpha i,\beta j}A^q_{\beta j}. \tag{2.59}$$

При этом система замыкается.

Приведем получающиеся при этом выражения для $\mathbf{B}$, $D^i_{\alpha\beta}$, $\mathbf{\Gamma}_i$:

$$\mathbf{B} = \frac{\hbar^2 N_F}{6}\left(Y_2 - Y_0\right)\mathbf{X}^q, \tag{2.60}$$

$$D^i_{\alpha\beta} = \frac{\hbar S_0}{5}\left(Y_2 - Y_0\right)e_{\alpha\gamma\mu}A^q_{\mu j}P_{\gamma i,\beta j}, \tag{2.61}$$

$$\Gamma^\alpha_i = 2\hbar S_0\left(Y_0 - Y_2\right)e_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta j}\left[\frac{1}{3}\delta_{\gamma\mu}\delta_{ij} - \frac{1}{5}P_{\gamma i,\mu j}\right]X^q_\mu. \tag{2.62}$$

Член $2\mathbf{B}\times\mathbf{X}$ (см. (2.42)), соответствующий этому выражению для $\mathbf{B}$, был получен в работе [18], и отброшен в окончательных уравнениях как малый. Однако он того же порядка величины, что и член $(\gamma^2/\chi_{n0})F_0^a\mathbf{S}\times\vec{\eta}$ в уравнении (2.51), и мы его отбрасывать не будем.

Отметим, что формула (2.58) при переходе к нормальной жидкости согласуется[3] с результатом Леггетта [16] о том, что функция распределения описывается нулевой и первой гармониками по $\mathbf{k}$ при условии, что характерный размер неоднородности велик по сравнению с v_F/ω.

В связи с экспериментом нас будет в основном интересовать случай температур, близких к T_c (см. следующий раздел). Величина $D^i_{\alpha\beta}$ выпадает из уравнений в интересной для нас области, и нам достаточно только $\mathbf{S}_q$ для описания вклада от $\delta\vec{\nu}$ в уравнения.

2.3. Уравнения вблизи перехода в нормальную фазу

В этом разделе мы приведем приближенные уравнения спиновой динамики в непосредственной близости от перехода в нормальную фазу. Для их вывода нужно произвести оценку величины членов уравнений предыдущего раздела и отбросить малые члены. При этом важны два малых параметра: $1 - T/T_c$ и $v_F/\lambda\omega$. Для оценки характерного размера неоднородности в непосредственной близости от температуры перехода можно использовать ее значение в нормальной фазе [13]: $\lambda = (w^2/3\kappa\sigma\nabla\omega_L)^{1/3}$. Асимптотики функций Йосида вблизи T_c таковы (ср. [22]):

$$1 - Y_0 \approx \frac{7\zeta(3)}{4\pi^2}\left(\frac{\Delta}{T_c}\right)^2, \tag{2.63}$$

$$1 - Y_2 \approx \frac{\pi}{2}\frac{\Delta}{T_c}. \tag{2.64}$$

Для оценки можно полагать $V \sim X \sim \sigma \sim \omega_L$, $A \sim 1/(\lambda m^*)$, а величины $\mathbf{B}$, D, $\mathbf{\Gamma}$ оценивать, пользуясь выражениями (2.60)–(2.62).

В уравнении (2.52) все члены, кроме трех первых и последнего, меньше члена, содержащего градиент спиновой плотности, по порядку величины в $\sqrt{1 - T/T_c}$ раз. В уравнении (2.51) дипольный момент важнее, чем члены, содержащие градиенты и $\mathbf{A}_i$, при температурах, не слишком близких к температуре перехода: $1 - T/T_c > (w/\lambda\Omega_B(T = 0))^4 \sim 0.02$, где $\Omega_B(T = 0)$ — частота продольного резонанаса в B-фазе при нулевой температуре. При этих условиях градиентные члены можно отбросить. В непосредственной же близости от температуры перехода

[3] В действительности в пределе $T \to T_c$ входящее в (2.58) отношение $\frac{\xi}{E}$ заменяется не на 1, а на $\mathrm{sign}\xi$. Поэтому переход к нормальной жидкости непосредственно в этой формуле затруднен. Обсуждение этой проблемы приведено в Приложении B.

можно отбросить дипольный член, а градиентные члены следует оставить, заменив $D^i_{\alpha\beta}$ приближенным выражением (2.61). Для оценки члена $\mathbf{B}\times\mathbf{X}$ воспользуемся приближением Леггетта-Такаги (2.60):

$$\mathbf{B} = \frac{Y_0 - Y_2}{Y_0 + 2Y_2}\mathbf{S}_q \sim \frac{1}{3}(1 - Y_2)\mathbf{S}_q, \tag{2.65}$$

и соотношениями

$$2\mathbf{X} = -\frac{\gamma^2}{\chi_{p0}}\mathbf{S}_p \tag{2.66}$$

и

$$\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_q = \mathbf{S}\times\vec{\eta}. \tag{2.67}$$

В результате получаются уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{S} = \mathbf{S}\times\vec{\omega}_L - \nabla_i \mathbf{J}_i + \mathbf{R}_D, \tag{2.68}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{J}_i = \mathbf{J}_i \times \left(\vec{\omega}_L - \frac{\gamma^2}{\chi_{n0}}F_0^a\mathbf{S}\right) - \frac{v_F^2}{3}(1+F_0^a)\nabla_i\mathbf{S} + \frac{v_F^2}{3}\frac{\chi_{n0}}{\gamma^2}\nabla_i\vec{\omega}_L - \frac{\mathbf{J}_i}{\tau_1}, \tag{2.69}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\eta} = \vec{\eta}\times\left(\vec{\omega}_L - \left(\frac{1}{2}+F_0^a\right)\frac{\gamma^2}{\chi_{n0}}\mathbf{S}\right) + \mathbf{R}_D - \frac{\vec{\eta}}{\tau}, \tag{2.70}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}R_{\alpha i} = -2e_{\alpha\beta\gamma}V^\beta R_{\gamma i}. \tag{2.71}$$

2.4. Гамильтонов формализм и уравнения спиновой динамики

Уравнения спиновой динамики нормальной жидкости (2.1), (2.2) (без учета релаксационного члена во втором из них) являются гамильтоновыми. Гамильтониан

$$\mathcal{H} = \int dV\left[\frac{\gamma^2}{\chi}\frac{(\mathbf{S}-(\chi/\gamma)\mathbf{H})^2}{2} + \frac{\gamma^2}{\chi_{n0}}\frac{3}{2v_F^2(1+F_1^a/3)}\mathbf{J}_i^2\right] \tag{2.72}$$

представляет собой энергию ферми-жидкости с отклоненной от равновесного значения намагниченностью и спиновым током (предполагается, что все высшие гармоники спиновой части функции распределения равны нулю, как и ее скалярная часть). Скобки Пуассона[4] имеют вид

$$\{S_\alpha(x), S_\beta(y)\} = e_{\alpha\beta\gamma}S_\gamma(x)\delta(x-y), \tag{2.73}$$

[4] Вместо скобок Пуассона можно рассматривать соответствующие коммутаторы $[\cdot,\cdot] = i\hbar\{\cdot,\cdot\}$.

$$
\begin{aligned}
\{S_\alpha(x), J_i^\beta(y)\} &= e_{\alpha\beta\gamma} J_i^\gamma(x)\delta(x-y) \\
&\qquad -\delta_{\alpha\beta}\delta_i(x-y)\cdot\frac{\chi_{n0}}{\gamma^2}\frac{v_F^2}{3}\left(1+\frac{F_1^a}{3}\right), \qquad (2.74)\\
\{J_i^\alpha(x), J_j^\beta(y)\} &= \delta_{ij}\delta(x-y)e_{\alpha\beta\gamma}S_\gamma(x)\cdot\frac{v_F^2}{3}\left(1+\frac{F_1^a}{3}\right)^2, \qquad (2.75)
\end{aligned}
$$

где $\delta_i(x) = \nabla_i\delta(x)$.

Эти скобки Пуассона можно получить, коммутируя между собой выражения для операторов спина и тока через операторы вторичного квантования. Для этого выпишем операторы спина

$$
\begin{aligned}
\hat{S}_\alpha(x) &= \frac{\hbar}{2}\sigma^\alpha_{\mu\nu}\psi^+_\mu(x)\psi_\nu(x) \qquad (2.76)\\
&= \frac{\hbar}{2}\sigma^\alpha_{\mu\nu}\sum_{k,k'}\hat{a}^+_{k\mu}\hat{a}_{k'\nu}e^{i(k'-k)x}
\end{aligned}
$$

и спинового тока (ср. (1.61))

$$
\begin{aligned}
\hat{J}_i^\alpha(x) &= \left(1+\frac{F_1^a}{3}\right)\frac{\hbar}{4im^*}\left[\psi^+_\mu(x)\nabla_i\psi_\nu(x) - \nabla_i\psi^+_\mu(x)\psi_\nu(x)\right]\sigma^\alpha_{\mu\nu} \qquad (2.77)\\
&= \left(1+\frac{F_1^a}{3}\right)\frac{\hbar}{4m^*}\sigma^\alpha_{\mu\nu}\sum_{k,k'}\hat{a}^+_{k\mu}\hat{a}_{k'\nu}\cdot(k'_i+k_i)e^{i(k'-k)x}.
\end{aligned}
$$

Прокоммутировав эти операторы, нужно усреднить результат, считая при этом, что неравновесные значения имеют только нулевая и первая гармоники спиновой части функции распределения ([16]; см. также раздел 2.1).

Гамильтониан и скобки Пуассона инвариантны относительно спиновых вращений вокруг направления магнитного поля. Генератором этих вращений является оператор продольной компоненты спина S_z (как и раньше, мы считаем, что поле направлено вдоль оси z). Поэтому (см. [72, Глава 8]) уравнения имеют дополнительный интеграл движения S_z, и можно искать их решения, являющиеся периодическими вращениями. Как было показано в работе [13], периодическим решением в замкнутой экспериментальной ячейке и является когерентно прецессирующая двухдоменная структура.

Уравнения Леггетта и Леггетта-Такаги без учета диссипативных членов являются гамильтоновыми [18]. Оказывается, приближенные уравнения спиновой динамики вблизи температуры перехода также имеют гамильтонову структуру. В этой области можно пренебречь сверхтекучими спиновыми токами по сравнению с неравновесными. Гамильтониан системы имеет вид:

$$\mathcal{H} = -\gamma \mathbf{S}\cdot\mathbf{H} + \frac{\gamma^2}{2\chi_{n0}} F_0^a \mathbf{S}^2 + \frac{\gamma^2}{2\chi_{p0}} \mathbf{S}_p^2 + \frac{\gamma^2}{2\chi_{q0}} \mathbf{S}_q^2 + U_D(\mathbf{d}) + \frac{\gamma^2}{2\chi_{n0}} \frac{3}{v_F^2(1+F_1^a/3)} \mathbf{J}_i^2, \tag{2.78}$$

в коммутаторах (2.73)–(2.75) нужно заменить полный спин $\mathbf{S}$ на спин нормальной компоненты $\mathbf{S}_q$ (эти выражения описывают коммутацию величин, относящихся к квазичастицам; поскольку мы пренебрегаем сверхтекучим током, весь ток $\mathbf{J}_i$ относится к нормальной компоненте). Кроме того, нужно добавить соотношения коммутации для компонент $\mathbf{S}_p$ и $\mathbf{S}_q$:

$$\{S_{p,\alpha}(x), S_{p,\beta}(y)\} = e_{\alpha\beta\gamma} S_{p,\gamma}(x)\delta(x-y), \tag{2.79}$$

$$\{S_{q,\alpha}(x), S_{q,\beta}(y)\} = e_{\alpha\beta\gamma} S_{q,\gamma}(x)\delta(x-y), \tag{2.80}$$

а также считать, что спин конденсата $\mathbf{S}_p$ коммутирует со спином квазичастиц $\mathbf{S}_q$ и спиновым током $\mathbf{J}_i$. Параметр порядка имеет нетривиальные коммутаторы только со спином конденсата:

$$\{S_{p,\alpha}(x), d_\beta(y)\} = e_{\alpha\beta\gamma} d_\gamma(x)\delta(x-y). \tag{2.81}$$

Если мы ограничимся рассмотрением в низшем порядке по дипольному взаимодействию, то соотношения коммутации между компонентами параметра порядка нам не понадобятся.

Из этого гамильтониана и системы коммутаторов можно вывести уравнения спиновой динамики вблизи T_c. При этом (при выводе (2.69)) нужно воспользоваться близостью к температуре перехода — условием того, что характерное значение спина квазичастиц значительно превосходит спин куперовских пар (это условие использовалось и при выводе приближенных уравнений в предыдущем разделе). В уравнение (2.70), как и в теории Леггетта-Такаги, вместо $F_0^a + 1/2$ входит F_0^a (см. обсуждение роли члена $2\mathbf{B}\times\mathbf{X}$ ниже формулы (2.62)).

Эта гамильтонова система также инвариантна (в B-фазе, где дипольная энергия не нарушает этой инвариантности; см. раздел 1.2) относительно спиновых вращений вокруг направления магнитного поля и его градиента, что позволяет искать ее прецессирующие решения.

2.5. Двухдоменная структура вблизи перехода

Будем искать прецессирующие решения уравнений спиновой динамики вблизи температуры перехода. В связи с экспериментом нас будет интересовать ситуация, когда магнитное поле и его (постоянный) градиент направлены вдоль оси z, и все величины мы считаем зависящими только от одной координаты z. Частоту прецессии ω_P будем считать близкой к ларморовской частоте (которую предполагаем мало меняющейся в пределах сосуда).

Пользуясь этими предположениями, заменим $\partial\vec{\eta}/\partial t$ на $\vec{\eta}\times\vec{\omega}_P$ в уравнении (2.51). Для характерного значения величины η (при условии $\omega\tau \geq 1$, которое выполняется в эксперименте [14]) тогда получим $\eta \sim \tau Q$, где в зависимости от близости к переходу Q следует заменить на R_D или $\lambda_0 \nabla J$ (см. обсуждение в разделе 2.3). Оценка показывает, что $\eta \ll \lambda_0 S$, т.е. спин конденсата практически не отличается от своего равновесного значения. Поэтому мы можем считать, что $\mathbf{S}_p = \lambda_0 \mathbf{S}$, $\mathbf{S}_q = (1-\lambda_0)\mathbf{S}$, и учитывать η только при вычислении релаксационных эффектов.

При таком предположении $2\mathbf{V} = \vec{\omega}_L - \vec{\sigma}$, где $\vec{\sigma} = (\gamma^2/\chi)\mathbf{S}$. Пользуясь этим соотношением и считая спин прецессирующим с частотой $\vec{\omega}_P$, изучим прецессирующие решения уравнения на параметр порядка (2.48). Если пренебречь пространственной неоднородностью (т.е. спиновыми токами и градиентом внешнего поля) как возмущением, то мы придем к задаче о периодических решениях уравнений (2.47), (2.48), которые в этом случае представляют собой уравнения Леггетта для сверхтекучей жидкости. Периодические решения этих уравнений исследовались в [34] (см. раздел 1.3)[5].

В сильных магнитных полях (при $\Omega_B \ll \omega_L$, где Ω_B — частота продольного резонанса) интересующие нас решения описываются выражениями

$$S_z = \omega_L \cos\beta, \quad S_\zeta = \omega_L, \quad S_\beta = 0, \tag{2.82}$$

угол $\Phi = \alpha + \gamma$ определяется условием (1.26)

$$(1+\cos\beta)(1+\cos\Phi) = \frac{3}{2} \tag{2.83}$$

при $\beta \leq \theta_L$ (семейство Iб)) и равен 0 при $\beta \geq \theta_L$ (семейство IIб)). Напомним, что угол β произволен, а угол α (который совпадает с азимутальным углом вектора спина) прецессирует с произвольной начальной фазой и частотой, которая совпадает с локальной ларморовской частотой для семейства Iб) и отличается от нее на $(16/15)(\Omega_B^2/\omega_L)\,(\cos\beta + 1/4)$ для семейства IIб). В неоднородном случае пространственное изменение частоты может компенсироваться спиновым током.

[5]Можно не опираться на анализ [34], а непосредственно искать периодические решения уравнений раздела 2.3 (ср. [73]). При этом получаются те же результаты.

Используя теперь соотношения (2.82) в качестве связей, выпишем уравнения для динамики углов β и α. Для этого заметим, что поскольку на решениях семейства Iб) дипольная энергия минимальна, то момент дипольных сил равен нулю. Для решений семейства IIб) ось $\mathbf{n}$ поворота матрицы $\hat{R}$ совпадает с осью $\hat{\beta}$, и дипольный момент равен

$$\mathbf{R}_D = \frac{16}{15}\frac{\chi}{\gamma^2}\Omega_B^2 \sin\beta\left(\cos\beta + \frac{1}{4}\right)\mathbf{n}. \tag{2.84}$$

Теперь можно приступить к решению уравнений (2.68), (2.69). Эти уравнения на спин и спиновый ток вблизи T_c почти совпадают с уравнениями Леггетта для нормальной жидкости, единственным отличием является появление дипольного момента. Выпишем эти уравнения в приведенных переменных $\vec{\sigma} = (\gamma^2/\chi)\mathbf{S}$ и $\mathbf{j}_i = (\gamma^2/\chi)\mathbf{J}_i$ (ср. [13]). Поскольку нас интересуют периодические решения с частотой ω_P, мы заменим временные производные в уравнениях в соответствии с равенствами $\partial\vec{\sigma}/\partial t = \vec{\sigma}\times\vec{\omega}_P$, $\partial\mathbf{j}_i/\partial t = \mathbf{j}_i\times\vec{\omega}_P$:

$$\vec{\sigma}\times(\vec{\omega}_L - \vec{\omega}_P) - \nabla\mathbf{j} + \mathbf{r}_D = 0, \tag{2.85}$$

$$\frac{w^2}{3}\frac{\partial(\vec{\sigma}-\vec{\omega}_L)}{\partial z} = \mathbf{j}\times(\vec{\omega}_L - \vec{\omega}_P + \kappa\vec{\sigma}) - \frac{\mathbf{j}}{\tau_1}, \tag{2.86}$$

где $\mathbf{j} = \mathbf{j}_3$, $\kappa = -F_0^a/(1+F_0^a)$, $w^2 = v_F^2(1+F_0^a)$ (напомним, что мы не учитываем F_1^a), и

$$\mathbf{r}_D = \frac{\gamma^2}{\chi}\mathbf{R}_D = \frac{16}{15}\Omega_B^2\sin\beta(\frac{1}{4}+\cos\beta)\theta(\beta-\theta_L)\mathbf{n}. \tag{2.87}$$

Решение этих уравнений можно искать по аналогии с решением в случае нормальной жидкости [13].

Из уравнения (2.86) видно, что $\nabla j^z = 0$. На границе замкнутой экспериментальной ячейки спиновый ток должен обращаться в ноль, поэтому $j^z \equiv 0$ во всем сосуде. Далее, из уравнений (2.85), (2.86) следует, что $\nabla(\mathbf{j}\vec{\sigma}) = 0$. В силу того же граничного условия $(\mathbf{j}\vec{\sigma}) \equiv 0$.

Из двух этих условий следует, что $(\mathbf{ju}) = 0$, где $\mathbf{u} = \vec{\omega}_L - \vec{\omega}_P + \kappa\vec{\sigma}$. Пользуясь этим, решаем уравнение (2.86):

$$\mathbf{j} = \frac{w^2}{3u^2}\mathbf{u}\times\nabla(\vec{\sigma}-\vec{\omega}_L). \tag{2.88}$$

Т.к. $j^z = 0$, то отсюда следует, что $(\vec{\sigma}\times\nabla\vec{\sigma})_z = 0$, а значит, вертикальная плоскость, в которой расположен вектор спина, не зависит от координат (и вращается с частотой ω_P), т.е. $\alpha = \text{const}$. Считая эту плоскость плоскостью yz, мы можем выписать координаты спина: $\vec{\sigma} = (0, \sigma\sin\beta, \sigma\cos\beta)$, где $\sigma \approx \omega_P$. Спиновый ток направлен вдоль оси $\hat{\beta}$, т.е. против оси x. При $|\omega_L - \omega_P| \ll \omega_P$ величина $\mathbf{u} = \kappa\vec{\sigma}$, и для тока получаем (ср. [13]):

$$j^x = -(w^2/3\kappa)\nabla\beta. \tag{2.89}$$

Для определения зависимости $\beta(z)$ нужно подставить это выражение для тока в уравнение (2.85). С учетом того, что $\omega_L - \omega_P = \nabla\omega_L(z - z_0)$ (где z_0 — та точка, где частота прецессии совпадает с локальной ларморовской частотой), уравнение (2.85) принимает вид

$$\beta'' = -\frac{z - z_0}{\lambda^3}\sin\beta + \frac{1}{l_D^2}\sin\beta\left(\frac{1}{4} + \cos\beta\right)\theta(\beta - \theta_L), \tag{2.90}$$

где $\lambda^3 = w^2/(3\kappa\sigma\nabla\omega)$, а новым параметром является длина, определяемая дипольным взаимодействием: $l_D = (5/16\kappa)^{1/2}w/\Omega_B$. При удалении от температуры перехода эта длина уменьшается и сравнивается с λ при $1 - T/T_c \sim 0.003$ (оценка произведена для магнитного поля $H = 413$Э и градиента $\nabla H = 0.19$Э/см, соответствующих одному из экспериментов [15]).

Нас интересует решение уравнения (2.90) с граничным условием $\nabla\beta = 0$, означающим отсутствие тока. При $\lambda \ll l_D$ это решение практически не отличается от решения для нормальной жидкости [13]. В противоположном предельном случае $\lambda \gg l_D$ решение изменяется (см. рис.2.2). Это решение по-прежнему описывает двухдоменную структуру. В одном из доменов (расположенном в области слабых полей) спин имеет равновесное значение, а в другом — отличается знаком от равновесного (рис.2.3). Толщина доменной стенки по порядку величины равна l_D, а сама стенка смещена от точки z_0 в область слабых полей (т.е. за счет уменьшения размера равновесного домена).

Это решение $\beta(z)$ имеет одну точку перегиба. Действительно, из уравнения (2.90) видно, что $\beta'' = 0$ а) либо в точке $z = z_0$, если $\beta(z_0) \le \theta_L$, б) либо в такой точке z, где $z - z_0 = (\lambda^3/l_D^2)(\cos\beta + 1/4) < 0$. Это означает, что точка перегиба есть точка пересечения нашего решения с жирной кривой на рисунке. Легко видеть, что решение имеет ровно одну точку перегиба.

Для того, чтобы вычислить положение самой доменной стенки, заметим, что уравнение (2.90) представляет собой уравнение движения частицы единичной массы в потенциале

$$U(\beta) = -\frac{z - z_0}{\lambda^3}\cos\beta + \frac{1}{2l_D^2}\left(\cos\beta + \frac{1}{4}\right)^2\theta(\beta - \theta_L).$$

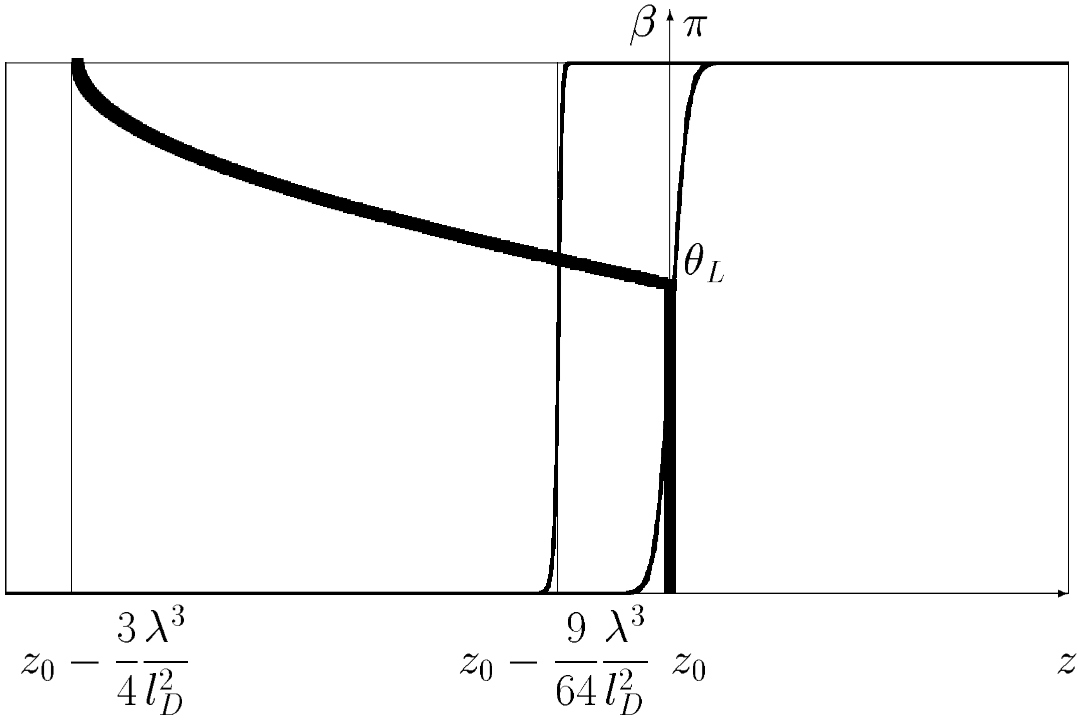


Рис. 2.2. Зависимость угла наклона намагниченности от координаты для двухдоменной структуры в нормальной (правая кривая) и сверхтекучей (левая кривая, построенная для $l_D \approx 0.11\lambda$) жидкости. Доменная стенка в сверхтекучей жидкости у́же и смещена относительно стенки в нормальном состоянии. Жирная кривая — множество точек перегиба (см. текст).

Роль времени при этом играет z, а сам потенциал зависит от времени. Решение, которое нас интересует, соответствует тому, что частица некоторое время находится в максимуме потенциала при $\beta = 0$, а потом перепрыгивает в точку $\beta = \pi$. Если $\lambda \gg l_D$, то в области "перескока" потенциал слабо зависит от времени, поэтому можно использовать закон сохранения энергии $U(0) = U(\pi)$, откуда следует, что стенка расположена в точке

$$z_{\text{ст}} = z_0 - \frac{9}{64}\frac{\lambda^3}{l_D^2}. \tag{2.91}$$

Толщину стенки можно оценить как время перескока.

Отметим, что уравнение, аналогичное (2.90), возникает при исследовании структуры однородно прецессирующего домена (HPD) в области углов $\beta \geq \theta_L$. В этой области $\alpha' = \Phi = 0$ [6], и решение находится из условия минимизации свободной энергии, которая представляет собой

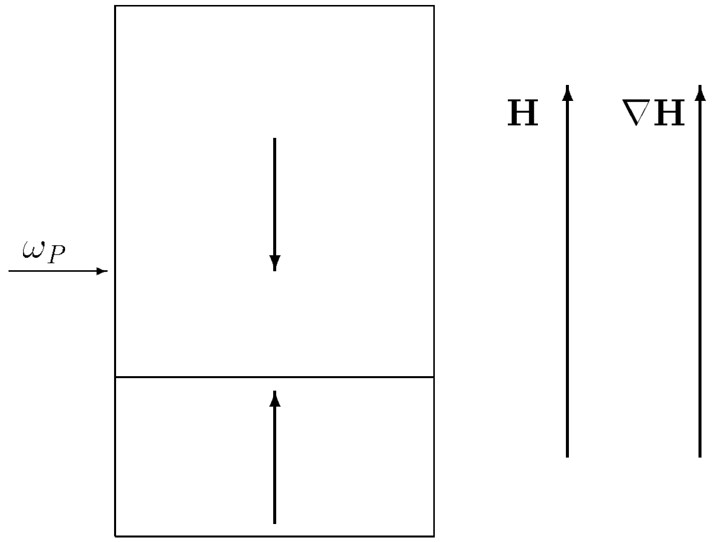


Рис. 2.3. Двухдоменная структура в сверхтекучем ^{3}He-B вблизи температуры перехода. Частота прецессии ω_P смещена относительно локальной ларморовской частоты в точках стенки.

сумму градиентной энергии, спектроскопической энергии в неоднородном внешнем поле и дипольной энергии:

$$F = \frac{\chi}{\gamma^2} \int dV \left\{ \frac{c_{\|}^2}{2} \beta'^2 - \omega_P \nabla\omega_L \cos\beta (z - z_0) + \frac{8}{15} \Omega_B^2 \left(\cos\beta + \frac{1}{4} \right)^2 \right\}, \tag{2.92}$$

где $c_{\|}$ — параметр, характеризующий спектр спиновых волн, см. [6]. Соответствующее уравнение Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$\beta'' = \frac{z - z_0}{\lambda^3} \sin\beta - \frac{1}{l_D^2} \sin\beta \left(\cos\beta + \frac{1}{4} \right), \tag{2.93}$$

где $\lambda = (c_{\|}^2 / \omega_P \nabla\omega_L)^{1/3}$, а $l_D = (\sqrt{15}/4)(c_{\|}/\Omega_B)$. Это уравнение отличается от (2.90) изменением знака при β''. Оно соответствует движению в потенциале

$$U(\beta) = \frac{z - z_0}{\lambda^3} \cos\beta - \frac{1}{2 l_D^2} \left(\cos\beta + \frac{1}{4} \right)^2 \theta(\beta - \theta_L).$$

Если считать, что это уравнение описывает доменную стенку между равновесным доменом и HPD и для углов $\beta < \theta_L$, то можно получить решение[6], изображенное на рис.2.4, которое качественно отличается от изображенного на рис.2.2. Это решение имеет три точки перегиба, которые можно найти, как и в предыдущем случае, и которые соответствуют пересечению решения с жирной линией на рис.2.4, а также широкое плато. Поведение этого решения можно понять следующим образом: при больших положительных z частица находится в максимуме потенциала при $\beta = 0$. При $z \sim z_0$ значения потенциала в точках $\beta = 0$ и $\beta = \theta_L$ сравниваются (а $U(\pi)$ остается гораздо меньше), и частица перескакивает в положение $\beta = \theta_L$. После этого по мере уменьшения z положение максимума потенциала, а вместе с ним и частицы, постепенно смещается в сторону $\beta = \pi$. Таким образом, частица движется почти по жирной линии. В этой области пространственное изменениие ларморовской частоты компенсируется моментом дипольных сил (ср. [6]). Наконец при

$$z = z_0 - \frac{3}{4}\frac{\lambda^3}{l_D^2} \tag{2.94}$$

частица достигает точки π и после этого остается в ней. Это решение качественно правильно отражает структуру HPD при $\beta \geq \theta_L$. Решение имеет вид трехдоменной структуры: в области сильных полей расположен равновесный домен, к нему примыкает домен толщиной $3\lambda^3/4l_D^2$, в котором угол между намагниченностью и полем медленно меняется от $\theta_L \approx 104^\circ$ до 180°, а в области самых слабых полей расположен домен, в котором намагниченность имеет направление, противоположное равновесному.

В работах [74, 75] показано, что в действительности толщина промежуточного домена несколько меньше (и равна $2(3-\sqrt{6})\lambda^3/8l_D^2$), поскольку при углах β, близких к π, может происходить перестройка решения в энергетически более выгодную конфигурацию, не относящуюся к решениям класса IIб).

2.6. Релаксация двухдоменной структуры

Для изучения релаксации необходимо учесть диссипативные члены в уравнениях. Энергия жидкости равна (вблизи температуры перехода мы пренебрегаем градиентной энергией, связанной с пространственным

---

[6] В действительности, в области углов $\beta < \theta_L$ угол α зависит от координат, и $\Phi \neq 0$, а определяется равенством (1.26). Однако зависимость β от координаты для решения, соответствующего доменной стенке [6], качественно такая же, как на рис.2. Угол α внутри доменной стенки вблизи z_0 меняется на конечную величину.

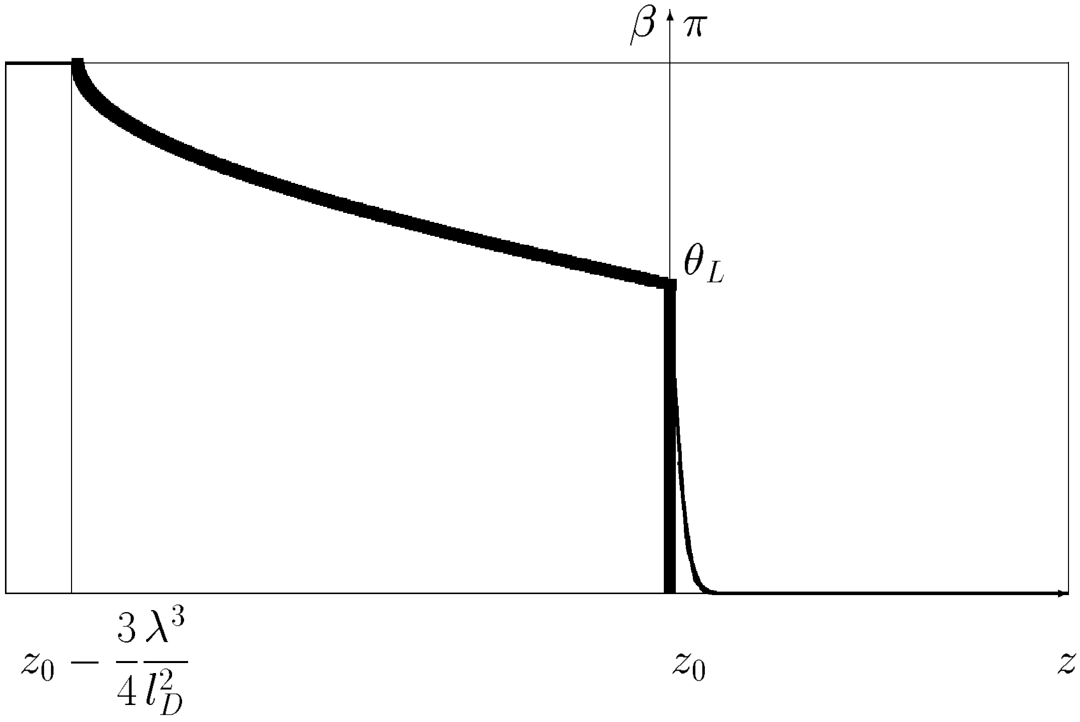


Рис. 2.4. Зависимость угла наклона намагниченности от координаты для HPD в области углов $\beta \geq \theta_L$. При $\theta_L < \beta < \pi$ эта кривая почти точно совпадает жирной линией — множеством точек перегиба.

изменением параметра порядка)

$$E = \int dz \frac{\chi}{\gamma^2} \left\{ \frac{(\vec{\sigma} - \vec{\omega}_L)^2}{2} + \frac{3\mathbf{j}^2}{2w^2} + \Omega_B^2 \left\langle \left(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{k}) \right)^2 \right\rangle \right\}. \tag{2.95}$$

Здесь первые два слагаемых соответствуют энергии ферми-жидкости с неравновесными значениями спиновой плотности и спинового тока (ср. [13]), а третий член представляет собой дипольную энергию. Усреднение в этом слагаемом ведется по направлениям единичного вектора $\hat{\mathbf{k}}$. Вычисляя временную производную энергии при помощи уравнений движения (2.48), (2.68), (2.69), получаем для диссипации:

$$\frac{dE}{dt} = -\int dz \frac{\chi}{\gamma^2} \left\{ \frac{3\mathbf{j}^2}{w^2 \tau_1} + \frac{\gamma^2}{\chi_{p0}} (\vec{\eta} \cdot \mathbf{r}_D) \right\}. \tag{2.96}$$

Первое слагаемое здесь соответствует диссипации в нормальной жидкости, а второе связано с механизмом Леггетта-Такаги [18]. Для оценки величины $\vec{\eta}$ нужно воспользоваться соответствующим уравнением движения. В области температур, где справедливо уравнение (2.70), из него можно получить оценку

$$(\vec{\eta}\cdot\mathbf{R}_D)=\mathbf{R}_D^2\frac{\tau}{1+\tau^2\tilde{\mathbf{u}}^2}, \tag{2.97}$$

где $\tilde{\mathbf{u}}=\vec{\omega}_L-\vec{\omega}_P-(F_0^a+1/2)(\gamma^2/\chi_{n0})\mathbf{S}$. Ближе к температуре перехода можно оценить η через градиентные члены в (2.51). Итак,

$$\frac{dE}{dt}=-\int dz\frac{\chi}{\gamma^2}\left\{\frac{3\mathbf{j}^2}{w^2\tau_1}+\frac{\chi}{\chi_{p0}}\frac{\tau}{1+\tau^2\tilde{\mathbf{u}}^2}\mathbf{r}_D^2\right\}. \tag{2.98}$$

В случае $\lambda\gg l_D$ вычисления приводят к выражению

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{\chi}{\gamma^2}\frac{w^2}{3\kappa^2 l_D}\left[\frac{C_1}{\tau_1}+\frac{C_2}{3}\frac{w^2}{l_D^2}\frac{\chi}{\chi_{p0}}\frac{\tau}{1+(\omega_P\tau)^2\left(\frac{F_0^a+1/2}{F_0^a+1}\right)^2}\right], \tag{2.99}$$

где C_1 и C_2 — числа порядка единицы, определяемые точной формой стенки:

$$C_1 = l_D\int dz\beta'^2, \tag{2.100}$$

$$C_2 = \frac{1}{l_D}\int dz\sin^2\beta\left(\cos\beta+\frac{1}{4}\right)^2\theta(\beta-\theta_L). \tag{2.101}$$

Считая толщину стенки l_D малой по сравнению с размером сосуда L, для энергии системы в главном приближении по l_D/L получим:

$$E=\frac{2\chi}{\gamma^2}\omega_P^2 l, \tag{2.102}$$

где l — длина домена с неравновесным значением намагниченности.

В нормальной жидкости дипольная энергия отсутствует, и сохраняется продольная компонента намагниченности [13]. Поэтому в процессе релаксации двухдоменной структуры уменьшается абсолютная величина намагниченности в обоих доменах, а положение доменной стенки меняется так, чтобы обеспечить сохранение продольной компоненты (см. раздел 2.1). В сверхтекучей жидкости намагниченность не сохраняется. Кроме того, отклонение абсолютной величины намагниченности от равновесной связано с сильным увеличением дипольной энергии. Поэтому в процессе релаксации абсолютная величина намагниченности не изменяется, а изменяется положение доменной стенки — растет равновесный домен (см. [6] для случая HPD).

Поскольку l однозначно определяется z_0 (см. (2.91)), а значение z_0 определяет частоту прецессии, для изменения частоты со временем получим:

$$\frac{d\omega_P}{dt} = \frac{l_D \nabla \omega_L}{6} \left(\frac{w}{\kappa \omega_P l_D} \right)^2 \left[\frac{C_1}{\tau_1} + \frac{C_2}{3} \frac{w^2}{l_D^2} \frac{\chi}{\chi_{p0}} \frac{\tau}{1 + (\omega_P \tau)^2 \left(\frac{F_0^a + 1/2}{F_0^a + 1} \right)^2} \right]. \quad (2.103)$$

Частота растет с постоянной скоростью.

2.7. Образование двухдоменной структуры. Конкуренция спиновых токов

При понижении температуры сигнал индукции от прецессирующей структуры исчезает, а при более низких температурах вновь восстанавливается. В этой области наблюдается HPD. Образование той или иной структуры является следствием конкуренции спиновых токов: после приложения импульса (в экспериментах по импульсному ЯМР) отклоненные от равновесных значений намагниченность и параметр порядка начинают прецессировать в неоднородном внешнем поле. Это приводит к появлению градиентов и возникновению спиновых токов. В нормальной жидкости [13] в силу ферми-жидкостных эффектов спиновый ток компоненты S_z направлен при этом в сторону слабых полей, а в сверхтекучей жидкости в гидродинамическом режиме [6] спиновый ток $\mathbf{J}_i^{loc}$ течет в сторону сильных полей. В результате возникают различные двухдоменные структуры — в нормальной жидкости равновесный домен расположен в области слабых, а в случае HPD — сильных полей. Оценим величину этих двух токов, чтобы понять, при каких температурах реализуется то или иное решение.

Будем считать, что импульс поперечного поля отклонил намагниченность на угол порядка 90°. Для оценки градиентов, возникающих при прецессии в неоднородном поле, можно воспользоваться уравнениями (2.47), (2.48). Градиент параметра порядка через время δt после импульса равен $\nabla R_{\alpha i} = \delta t \cdot e_{\alpha\beta\gamma} R_{\beta i} (\nabla \omega_L)_\gamma$, а значит $\mathbf{A} = \delta t \cdot \nabla \omega_L / (2m^*)$. В результате для гидродинамического вклада в спиновый ток получаем оценку:

$$J^{loc} = \frac{2\hbar S_0}{5m^*} (1 - Y_0) \nabla \omega_L \delta t. \quad (2.104)$$

Неравновесный ток можно оценить из уравнения (2.43). Пренебрегая членами, пропорциональными $Y_0 - Y_2$, которые невелики во всей области температур, при $\omega_P \tau_1 > 1$ можно разрешить уравнение относительно тока:

$$\delta \mathbf{J} = \frac{\mathbf{u}}{u^2} \times \left[\frac{v_F^2}{3} \nabla \mathbf{S}_q + \frac{\hbar S_0}{2m^*} Y_2 \frac{\gamma^2}{\chi_{n0}} F_0^a \nabla \mathbf{S} \right]. \tag{2.105}$$

Здесь $\mathbf{u} = \vec{\omega}_L - \vec{\omega}_P - (\gamma^2/\chi_{n0}) F_0^a \mathbf{S}$. Подставляя это выражение в предыдущую формулу, приходим к оценке

$$\delta J = -\frac{\hbar S_0}{2m^*} \left(\frac{\chi}{\chi_{n0}} \right)^2 \frac{(1+F_0^a)^2 (1 - \lambda_0 + Y_2 F_0^a)}{-F_0^a} \nabla \omega_L \delta t. \tag{2.106}$$

Коэффициенты в выражениях для двух вкладов в ток изображены на рис.2.5. Они равны при $1 - T/T_c \sim 0.15$. Таким образом, вблизи перехода возникает структура, описанная в предыдущих разделах, при низких температурах должен образовываться однородно прецессирующий домен (HPD). В области промежуточных температур конкуренция спиновых токов, видимо, приводит к хаотической картине, и релаксация происходит быстрее, чем успевает установиться какое-либо из однородно прецессирующих состояний.

Недавно была обнаружена новая долгоживущая когерентно прецессирующая структура в ^{3}He-B при температурах, значительно ниже температуры перехода [76]. Рост со временем частоты прецессии в процессе релаксации этой структуры, видимо, свидетельствует о том, что равновесный домен расположен в области более слабых полей, как и в двухдоменных структурах в нормальной жидкости и в сверхтекучей вблизи T_c. Естественно предположить, что и в этом случае к образованию такой структуры приводит бездиссипативный спиновый ток, связанный с ферми-жидкостным взаимодействием. Оценки, приведенные в работе, однако, показывают, что роль этого тока при низких температурах мала. Вопрос о причинах образования нового когерентно прецессирующего состояния при низких температурах остается открытым. Его можно пытаться разрешить, исследуя полную систему уравнений спиновой динамики, полученную в настоящей работе.

Приложение A

В этом приложении мы приведем вывод уравнений (2.42), (2.43) эволюции спина боголюбовских квазичастиц и неравновесного спинового тока. Спин нормальной компоненты определен соотношением (ср. (2.25)):

$$\mathbf{S}_q = \hbar \sum_k \left[\frac{\xi}{E} \delta \vec{\nu} + \left(1 - \frac{\xi}{E} \right) \hat{\mathbf{d}} (\hat{\mathbf{d}} \delta \vec{\nu}) \right]. \tag{2.107}$$

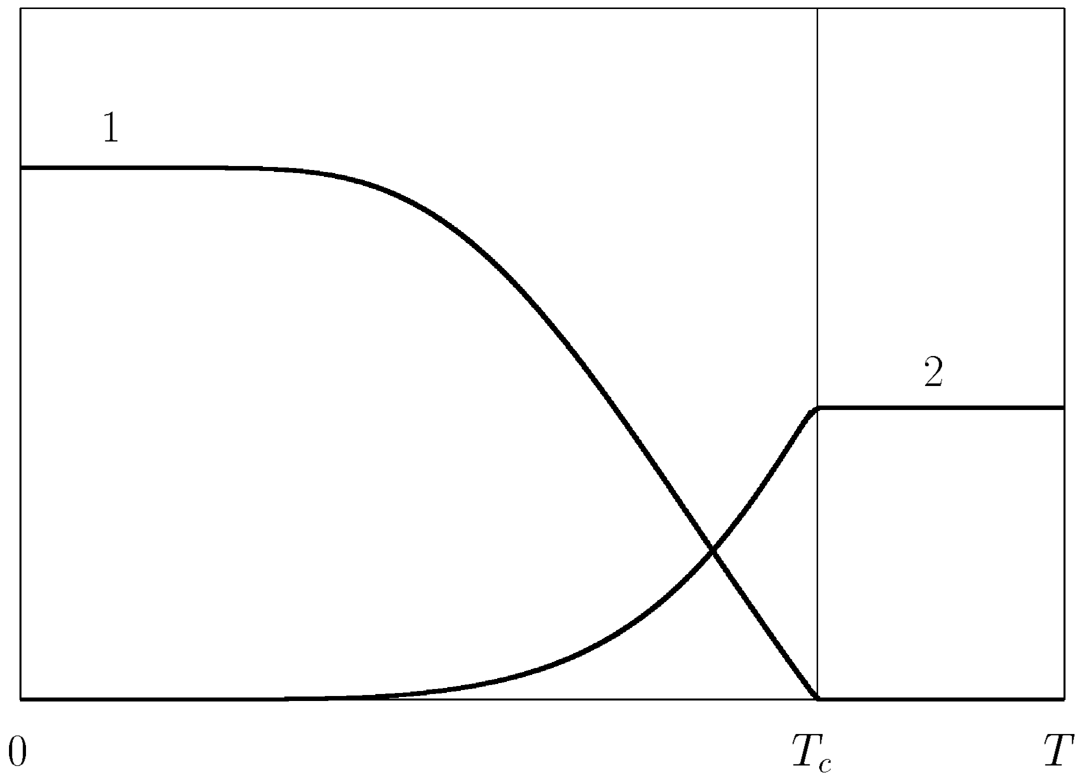


Рис. 2.5. Коэффициенты, определяющие относительную важность гидродинамического спинового тока $\mathbf{J}_i^{loc}$ (кривая 1) и неравновесного спинового тока $\delta\mathbf{J}_i$ (кривая 2).

Временная производная функции распределения боголюбовских квазичастиц (после калибровочного преобразования) определяется кинетическим уравнением (2.22), а параметр порядка $\mathbf{d}$ в системе отсчета, определяемой калибровочным преобразованием, ("подвижной"), не зависит от времени. Пользуясь этим, вычислим временные производные $\mathbf{S}_q$ и $\delta\mathbf{J}_i$ в "подвижной" системе отсчета. Мы приведем вывод уравнения движения для спина квазичастиц, вывод уравнения для тока аналогичен. Итак,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{S}_q \;&=\; \hbar\sum_k\left[\frac{\xi}{E}\left\{\frac{\xi}{E}(\mathbf{v}_F\nabla)(\varphi'\delta\vec{E}-\delta\vec{\nu})+2\delta\vec{E}\times\delta\vec{\nu}\right\}+\right. \\ &\left.\left(1-\frac{\xi}{E}\right)\hat{\mathbf{d}}\left(\hat{\mathbf{d}}\cdot\left\{\frac{\xi}{E}(\mathbf{v}_F\nabla)(\varphi'\delta\vec{E}-\delta\vec{\nu})+2\delta\vec{E}\times\delta\vec{\nu}\right\}\right)\right].\end{aligned} \tag{2.108}$$

В этом выражении выделим четыре составляющих: первая и вторая из них не содержат градиентов и содержат одна четные, а другая - нечетные по импульсам составляющие $\delta\vec{E}$ и $\delta\vec{\nu}$, третья часть содержит градиенты функции распределения, а четвертая — градиенты $\delta\vec{E}$. Будем вычислять их отдельно.

Для первой составляющей имеем, выделяя член $2\mathbf{X}\times\mathbf{S}_q$:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{S}_q\right)^{(1)} \quad &= 2\hbar\sum_k\left[\frac{\xi}{E}\left\{\frac{\xi}{E}\mathbf{X}\times\delta\vec{\nu}+\left(1-\frac{\xi}{E}\right)\hat{\mathbf{d}}\times\delta\vec{\nu}(\hat{\mathbf{d}}\mathbf{X})\right\}+\right.\\
&\left.\left(1-\frac{\xi}{E}\right)\hat{\mathbf{d}}\left(\hat{\mathbf{d}},\frac{\xi}{E}\mathbf{X},\delta\vec{\nu}\right)\right]=\\
&2\hbar\sum_k\left[\frac{\xi^2}{E^2}\mathbf{X}\times\delta\vec{\nu}+\frac{\xi}{E}\left(1-\frac{\xi}{E}\right)\mathbf{X}\times\left\{\delta\vec{\nu}-\hat{\mathbf{d}}(\hat{\mathbf{d}}\delta\vec{\nu})\right\}\right]=\\
&2\hbar\mathbf{X}\times\sum_k\left[\frac{\xi}{E}\delta\vec{\nu}+\left(1-\frac{\xi}{E}\right)\hat{\mathbf{d}}(\hat{\mathbf{d}}\delta\vec{\nu})-\left(1-\frac{\xi^2}{E^2}\right)\hat{\mathbf{d}}(\hat{\mathbf{d}}\delta\vec{\nu})\right]=\\
&2\mathbf{X}\times(\mathbf{S}_q-\mathbf{B}),
\end{aligned}
\tag{2.109}
$$

где $\mathbf{B}$ задано формулой (2.44). Здесь мы воспользовались тождеством [18]:

$$
\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{B}\times\hat{\mathbf{d}}(\hat{\mathbf{d}}\mathbf{A})+\hat{\mathbf{d}}\times\mathbf{A}(\hat{\mathbf{d}}\mathbf{B})+\hat{\mathbf{d}}(\hat{\mathbf{d}},\mathbf{B},\mathbf{A})=0,
$$

$(\mathbf{d},\mathbf{B},\mathbf{A})$ обозначает смешанное произведение векторов.

Во второй составляющей удобно выделить член $2m^*\mathbf{A}_i\times\mathbf{J}_i^q$, соответствующий удлинению дивергенции спинового тока квазичастиц (2.56). После аналогичных преобразований получим:

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{S}_q\right)^{(2)}=2m^*\mathbf{A}_i\times\mathbf{J}_i^q 2m^* D^i_{\alpha\beta}A_{\beta i},
$$

где D определено формулой (2.45). Для третьей составляющей получается выражение:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{S}_q\right)^{(3)}=-\nabla_i\mathbf{J}_i^q-\nabla_i\hbar\sum_k v_{Fi}\left(1-\frac{\xi^2}{E^2}\right)\left[\hat{\mathbf{d}}(\hat{\mathbf{d}}\delta\vec{\nu})-\delta\vec{\nu}\right]=\\
-\nabla_i\mathbf{J}_i^q+e_{\alpha\beta\gamma}\nabla_i D^i_{\beta\gamma},
\end{aligned}
$$

а четвертая не содержит $\delta\vec{\nu}$, поэтому все суммы по импульсам вычисляются:

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{S}_q\right)^{(4)}=-\hbar S_0 Y_2\cdot\nabla_i\mathbf{A}_i.
$$

Суммируя эти вклады, получаем выражение для производной спина квазичастиц в "подвижной" системе отсчета:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{S}_q\right)^{\Pi} = 2\mathbf{X}\times(\mathbf{S}_q - \mathbf{B}) - (\nabla_i - 2m^*\mathbf{A}_i\times)\mathbf{J}_i^q + e_{\alpha\beta\gamma}\nabla_i D^i_{\beta\gamma} - 2m^* D^i_{\alpha\beta}A_{\beta i} - \hbar S_0 Y_2 \nabla_i \mathbf{A}_i. \tag{2.110}$$

Переходя в лабораторную систему отсчета (см. (2.38), (2.39)) и выражая $\mathbf{J}_i^q$ через $\delta\mathbf{J}_i$ при помощи (2.56), приходим к уравнению (2.42). Релаксационные члены обсуждаются в следующем приложении.

Приложение Б

Для вывода релаксационных членов воспользуемся формой интеграла столкновений, приведенной в [18]:

$$\vec{I}(\delta\vec{\nu}) = -\frac{1}{\tau_{\mathrm{CE}}}\left(\delta\vec{\nu} - \varphi'\delta\vec{E}\right) - \frac{1}{\tau'}\left(\delta\vec{\nu} - \varphi'\delta\vec{F}\right). \tag{2.111}$$

Вид первого члена в правой части был предложен в работе Комбеско и Эбисавы [77] и соответствует релаксации нормальной компоненты к относительному равновесию с конденсатом при фиксированном состоянии последнего (т.е. при фиксированном $\delta\vec{E}$). Вид этого члена определяется тем, что он должен обращаться в ноль в локальном равновесии. Второй член соответствует столкновениям квазичастиц между собой, т.е. перераспределению спина между квазичастицами при сохранении полного спина нормальной компоненты. Вид этого члена обусловлен тем, что при таких столкновениях сохраняется спин, но не спиновый ток — ток релаксирует к своему равновесному значению:

$$\frac{1}{\hbar}\delta\vec{F} = k_i\mathbf{A}_i + \frac{\xi}{E}\mathbf{X}^q - \left(1-\frac{\xi}{E}\right)\hat{\mathbf{d}}(\hat{\mathbf{d}}\cdot(k_i\mathbf{A}_i - \mathbf{X}^q)), \tag{2.112}$$

где

$$\mathbf{S}_q = \frac{\chi_{q0}}{\gamma^2}(-2\mathbf{X}^q) \tag{2.113}$$

(ср. (2.55)). Легко проверить, что этот член в интеграле столкновений не дает вклада в релаксацию спина квазичастиц. При переходе к нормальной жидкости $\tau_{\mathrm{CE}} \to \infty$, $\tau' \to \tau_n^0$, и релаксация описывается вторым членом. При этом в процессе релаксации полный спин сохраняется (отметим в связи с этим, что мы работаем в предположении бесконечно большого времени продольной спиновой релаксации T_1, ср. [16]).

Для столкновительного члена в уравнении для спина квазичастиц получим:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{S}_q\right)_{\text{coll}} = -\frac{1}{\tau_{\text{CE}}(T)}(\mathbf{S}_q - \mathbf{S}_q^{loc}), \tag{2.114}$$

где $\mathbf{S}_q^{loc}$ - значение спина квазичастиц при $\delta\vec{\nu} = \varphi'\delta\vec{E}$, т.е. в локальном равновесии. Т.к. $\mathbf{S}_q^{loc} = (\chi_{q0}/\chi_{p0})\mathbf{S}_p$, то, переходя в (2.114) к переменным $\mathbf{S}_q$ и $\mathbf{S}$, приводим релаксационный член к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{S}_q\right)_{\text{coll}} = -\frac{1}{\lambda_0\tau_{\text{CE}}(T)}(\mathbf{S}_q - (1-\lambda_0)\mathbf{S}). \tag{2.115}$$

Это соответствует уравнению (2.42) при $\tau = \lambda_0\tau_{\text{CE}}$. Отметим, что при $T \to T_c$ это время релаксации стремится к времени жизни квазичастиц нормальной ферми-жидкости: $\tau \to \tau_n^0$ [78, 79].

Для релаксации спинового тока получаем:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{J}_i\right)_{\text{coll}} = -\frac{1}{\tau_1}\delta\mathbf{J}_i, \tag{2.116}$$

где $1/\tau_1 = 1/\tau_{\text{CE}} + 1/\tau'$. Вблизи температуры перехода $\tau_1 \approx \tau' \approx \tau_n^0$.

Приложение B

При переходе к случаю нормальной жидкости, например, в формулах (2.25), (2.26), (2.58), возникает следующая сложность. В этом пределе выражение ξ/E переходит в signξ, и в формулах даже в нормальной жидкости остаются слагаемые, зависящие от параметра порядка. Причина состоит в том, что матрица (2.19) преобразования Боголюбова, использованного при выводе указанных формул, при $T \to T_c$ стремится к единичной только при $\xi > 0$.

Чтобы избавиться от этой трудности, можно использовать боголюбовское преобразование, переходящее в тождественное при $T \to T_c$. Это преобразование совпадает с (2.19) при $\xi > 0$ и отличается от него заменой ξ на $|\xi|$ и изменением знака недиагональных по индексу частица-дырка компонент (т.е. изменением знака v) при $\xi < 0$. Такая замена возможна благодаря неоднозначности боголюбовского преобразования: для каждой пары $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ у боголюбовского гамильтониана есть два собственных состояния с энергией E и два с энергией $-E$. Поэтому преобразования, меняющие местами эти два двумерных подпространства, а также поворачивающие каждое из них в отдельности, не меняют диагонального вида гамильтониана, что и обеспечивает нужную свободу. То боголюбовское преобразование, которое мы только что описали, по существу, является преобразованием не к квазичастицам с двумя ветвями спектра $\varepsilon(\mathbf{k}) = \pm E$, а к квазичастицам со спектром $\varepsilon(\mathbf{k}) = \pm \mathrm{sign}(\xi) E$ (ср.[78]), что при $T \to T_c$ переходит в $\pm\xi$. Эти две ветви спектра в нормальной жидкости соответствуют квазичастицам и квазидыркам.

Можно показать, что изменение преобразования Боголюбова приводит к тому, что во всех выражениях работы нужно заменить ξ/E на $|\xi|/E$. Это отношение при приближении к температуре перехода стремится к 1 независимо от знака ξ.

Часть 3.

Топология пересечения вихревой решетки с плоским солитоном

Неоднородные распределения в упорядоченных системах, имеющие или не имеющие особенностей, такие, как доменные стенки, дислокации и дисклинации, вихри и др., давно исследуются в физике конденсированного состояния. В принципе, точная форма распределения параметра порядка в системах с нарушенной симметрией может быть найдена из уравнений, описывающих эту систему. Однако часто решить соответствующие уравнения сложно, и в любом случае удобно заранее представлять себе, какие дефекты могут возникать в системе. Описание и классификацию возможных дефектов можно получить, изучая глобальные топологические свойства области изменения параметра порядка. Адекватным математическим языком для такого исследования является язык гомотопической топологии [49, 80], который в настоящее время широко используется в физике (см. обзоры [19, 81]).

В этой части мы дадим краткое описание гомотопических методов исследования дефектов. В качестве примеров мы рассмотрим некоторые особенности распределения параметра порядка в A-фазе. Эти примеры будут использованы в разделе 3.2, где мы изучим специальный случай дефектов во вращающемся сосуде. В этом разделе нам придется изучать не гомотопические группы, а более сложные пространства отображений. При этом существенная часть задачи будет состоять в топологической классификации отображений $S^2 \times S^1 \to S^2$ и $S^1 \times S^1 \times S^1 \to S^2$. Последнее пространство отображений иногда называют торической гомотопической группой 2-сферы $T_3(S^2)$. В работе [82] утверждается, что гомотопическая классификация таких отображений неизвестна. В действительности, она была получена Л.С. Понтрягиным еще в конце 30-х годов [83].

Результаты настоящей части могут быть применены для исследования других систем со спонтанно нарушенной симметрией, описываемых трехмерным вектором (например, гейзенберговских магнетиков), в случае, если на систему наложены периодические или смешанные постоянно-периодические (постоянные вдоль одних направлений и периодические вдоль других, см. ниже) граничные условия.

В этой части Z обозначает группу целых чисел, а Z_N — группу вычетов по модулю N: $\{0, 1, \ldots, N-1\}$.

3.1. Гомотопическая классификация дефектов

Идея гомотопической классификации дефектов состоит в следующем. Рассмотрим какое-либо вещество со спонтанно нарушенной симметрией. Однородные состояния такого вещества описываются параметром порядка K, который, реализуя вырожденный минимум свободной энергии ((1.7), если мы не учитываем дополнительные взаимодействия), является элементом некоторого пространства вырождения R. Например, в случае сверхтекучей системы с s-спариванием параметром порядка является комплексное число, модуль которого фиксирован условием минимальности свободной энергии, а фаза может принимать любые значения. Поэтому пространство вырождения представляет собой окружность, которую можно параметризовать значением фазы.

В неоднородном состоянии K зависит от пространственных координат, т.е. возникает отображение реального пространства M в пространство вырождения. Допустим, что в пространстве существуют точки, где функция $K(\mathbf{r})$ имеет разрыв. Из-за сильного возрастания градиентной энергии состояние со спонтанно нарушенной симметрией разрушается в небольшой окрестности U таких точек. Таким образом, возникает отображение реального пространства M с выколотым множеством особых точек U в пространство вырождения R: $M \backslash U \to R$. Это отбражение, как мы сейчас увидим, и характеризует дефект.

Если непрерывно изменяя распределение параметра порядка в пространстве, т.е. непрерывно деформируя наше отображение, мы можем добиться того, что особенность исчезнет[1], то такой дефект является не-

[1]Т.е. распределение параметра порядка можно будет продолжить в область U без разрывов.

устойчивым. Действительно, в процессе деформации энергия системы вне U все время находилась вблизи минимума, поскольку параметр порядка вне дефекта принадлежал пространству вырождения, а градиентная энергия тоже существенно не возрастала — мы не допускали новых разрывов. С другой стороны, мы добились того, что в результате деформации исчез проигрыш в энергии, связанный с образованием нормальной фазы в сердцевине дефекта U. Значит, состояние с дефектом не отделено барьером (по крайней мере, очень высоким) от энергетически более выгодного состояния, что и означает неустойчивость дефекта.

Если же устранить особенность непрерывным изменением распределения параметра порядка вокруг дефекта нельзя, то дефект является устойчивым (топологически устойчивым, поскольку такая топологическая классификация не учитывает точно всех изменений энергии в процессе деформации). Если одно распределение параметра порядка вокруг дефекта можно получить из другого деформацией, то два таких распределения относят к одному классу. Для того чтобы найти среди распределений данного класса наиболее энергетически выгодное, нужно минимизировать функционал свободной энергии. При этом часто удобно использовать соображения симметрии.

Таким образом, для выяснения возможных типов дефектов требуется классифицировать отображения части реального пространства (без особых точек) в пространство вырождения R, относя к одному классу отображения, получающиеся друг из друга непрерывной деформацией. Эту задачу и решает гомотопическая топология. Два отображения называются гомотопными, если они принадлежат к одному такому классу.

Часто для описания топологического класса дефекта не требуется изучать отображения всего дополнения к особому множеству в реальном пространстве. Например, для описания линейного дефекта достаточно окружить особую линию замкнутым контуром C (см. рис.3.1а) и рассматривать его отображения в R. В случае s-спаривания, который мы упоминали выше, нужно изучать отображения такого контура в фазовую окружность $R = S^1$. Такие отображения $C \to S^1$ характеризуются единственным топологическим инвариантом — числом раз, которое образ контура C наматывается на S^1. В результате мы получаем обычную классификацию вихрей по числу квантов циркуляции — числу оборотов фазы при обходе вихря. Для того чтобы устранить вихревую особенность, нужно нарушить сверхтекучесть на целой уходящей на бесконечность поверхности, границей которой является вихревая нить. Для этого требуется макроскопическая энергия, пропорциональная площади поверхности. Таким образом, различные топологические классы отделены друг от друга макроскопически высокими барьерами.

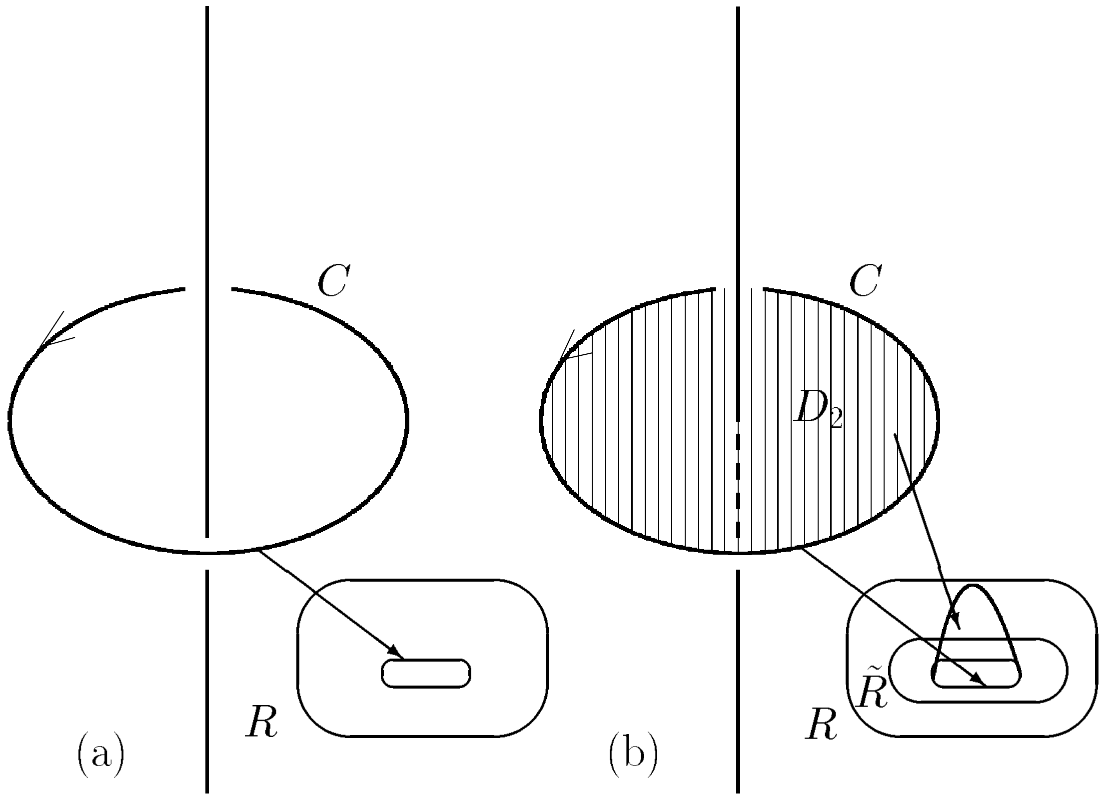


Рис. 3.1. (a) Контур, охватывающий сингулярный вихрь. Отображение этого контура в пространство вырождения R представляет элемент $\pi_1(R)$ и характеризует вихрь. (b) Несингулярный вихрь. При отображении диска D_2 в пространство вырождения R граница диска C отображается в $\tilde{R}$. Это отображение представляет элемент относительной группы $\pi_2(R, \tilde{R})$ и характеризует вихрь.

В случае произвольного пространства вырождения совокупность классов гомотопных отображений контура в R называется[2] *фундаментальной группой* пространства R и обозначается $\pi_1(R)$. Таким образом, классификация линейных дефектов сводится к вычислению фундаментальной группы.

В случае A-фазы ^{3}He параметр порядка имеет вид (1.8)

$$A_{\alpha i} = \Delta(T) d_\alpha \left(\Delta'_i + i\Delta''_i\right).$$

При этом модуль щели Δ фиксирован требованием минимальности энер-

[2]Строго говоря, эта совокупность будет фундаментальной группой, только если мы будем рассматривать отображения с фиксированным значением параметра порядка в фиксированной точке контура; указанная в тексте совокупность отображений совпадает с фундаментальной группой, если она является абелевой, и получается из нее приравниванием всех коммутаторов нулю в неабелевом случае; ниже нам будут встречаться только абелевы фундаментальные группы, и мы не будем обращать внимание на это различие [19, 49, 80].

гии, и элемент пространства вырождения R_A задается единичным вектором $\mathbf{d}$ и парой ортогональных единичных векторов $\mathbf{\Delta}'$ и $\mathbf{\Delta}''$, задающих направление $\mathbf{l} = \mathbf{\Delta}' \times \mathbf{\Delta}''$ орбитального момента куперовских пар. Область изменения вектора $\mathbf{d}$ — двумерная сфера S^2, а тройки векторов $(\mathbf{\Delta}', \mathbf{\Delta}'', \mathbf{l})$ — группа[3] вращений SO(3). Одновременное изменение знака векторов $\mathbf{d}$, $\mathbf{\Delta}'$, $\mathbf{\Delta}''$ не меняет параметра порядка, поэтому пространство вырождения [84]

$$R_A = \left(S^2 \times \mathrm{SO}(3)\right)/Z_2. \tag{3.1}$$

Фундаментальная группа $\pi_1(R_A) = Z_4$ состоит из четырех элементов. Поэтому вихри в A-фазе описываются индексом N, принимающим четыре значения $N = 0, 1, 2, 3$. Приведем пример распределения параметра порядка для разных N (вихрь параллелен оси $\hat{z}$, φ — угол поворота вокруг этой оси):

$$\mathbf{\Delta}' + i\mathbf{\Delta}'' = \exp\frac{i\varphi N}{2}\left(\hat{x} + i\hat{y}\right), \tag{3.2}$$

$$\mathbf{d} = \hat{x}\cos\frac{N\varphi}{2} + \hat{y}\sin\frac{N\varphi}{2}. \tag{3.3}$$

$N = 0$ соответствует нулевому элементу фундаментальной группы — отсутствию особенности.

Мы пока не учитывали дополнительные взаимодействия в ^{3}He, например дипольную энергию (1.17), которые частично или полностью снимают вырождение и сужают пространство возможных состояний R. Дипольная энергия (1.17) имеет порядок величины g_D, а градиентная энергия (1.31) на расстоянии r от дефекта — $K_1\Delta^2/r^2$. Сравнение этих величин показывает, что дипольная энергия существенна для исследования дефектов на расстояниях, превышающих так называемую дипольную длину $\xi_D = \left(K_1\Delta^2/g_D\right)^{1/2}$. На бóльших расстояниях от дефекта $r > \xi_D$ пространство вырождения изменяется. В A-фазе дипольная энергия (1.19) равна

$$U_D = -\frac{3}{5}g_D(T)\left(\mathbf{d}\cdot\mathbf{l}\right)^2$$

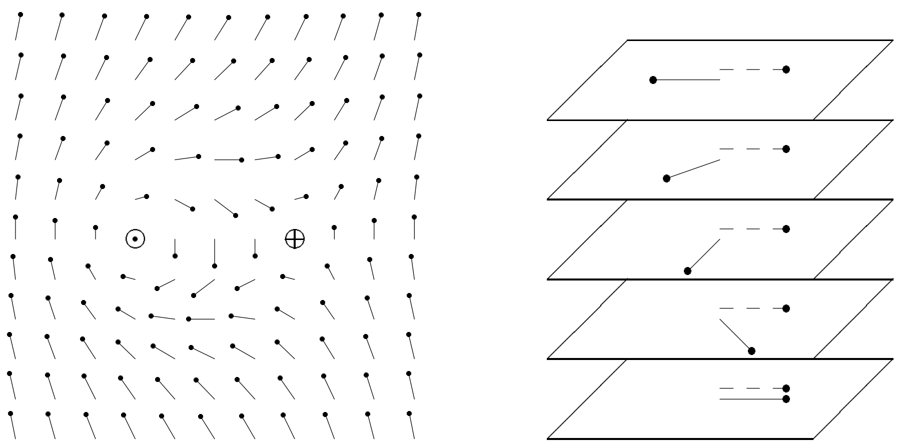
и минимальна, когда $\mathbf{d} = \pm\mathbf{l}$. Легко видеть, что пространство вырождения при ограничении $\mathbf{d} = \pm\mathbf{l}$ сужается и равно $\tilde{R}_A = \mathrm{SO}(3)$. Поскольку $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) = Z_2$, в этой области расстояний имеется всего один тип нетривиальных линейных сингулярных дефектов, например: $\mathbf{\Delta}' + i\mathbf{\Delta}'' = \exp(i\varphi)(\hat{x} + i\hat{y})$; $\mathbf{d} = \mathbf{l} = \hat{z}$. Нулевой элемент фундаментальной группы отвечает отсутствию дефекта.

[3] Матрица из SO(3) задает поворот, который переводит стандартную тройку ортонормированных векторов $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ в тройку $(\mathbf{\Delta}', \mathbf{\Delta}'', \mathbf{l})$.

До сих пор мы говорили о сингулярных дефектах, т.е. дефектах, в коре которых нарушена сверхтекучесть (в случае ^{3}He). Существуют и несингулярные дефекты: например, в коре дефекта может нарушаться условие $\mathbf{d} = \pm\mathbf{l}$, обеспечивающее минимальность дипольной энергии. При этом представляет интерес распределение параметра порядка в коре. Такие распределения уже не являются собственно дефектами (сверхтекучесть не нарушена и параметр порядка определен всюду), однако они также могут быть топологически устойчивыми. Их часто называют (в зависимости от размерности) линейными (1D), плоскими (2D) или частицеподобными (0D) *солитонами*.

Каждое такое распределение описывается отображением $K(\mathbf{r})$, таким, что K является элементом $\tilde{R} = \tilde{R}_A$ вне кора и, вообше говоря, элементом $R = R_A$ внутри кора особенности. В случае линейного солитона мы можем окружить его контуром (рис.3.1b) и рассматривать отображения диска D_2, натянутого на этот контур, в $R = R_A$, такие, что сам контур отображается в $\tilde{R} = \tilde{R}_A$. Гомотопические классы (т.е. классы, объединяющие отображения, которые могут быть получены друг из друга непрерывной деформацией) таких отображений образуют (если мы опять фиксируем значение параметра порядка в некоторой точке контура) так называемую *относительную гомотопическую группу размерности два* $\pi_2(R_A, \tilde{R}_A)$. Пользуясь методами гомотопической топологии можно показать, что $\pi_2(R_A, \tilde{R}_A) = Z$, и следовательно, линейные солитоны характеризуются одним целым числом N. Если спиновый вектор $\mathbf{d}$ постоянен в области солитона, то солитон описывается отображением диска $\mathbf{r} \to (\mathbf{\Delta}'(\mathbf{r}), \mathbf{\Delta}''(\mathbf{r}), \mathbf{l}(\mathbf{r}))$, таким, что на контуре, ограничивающем диск, $\mathbf{l} = \pm\mathbf{d} = \mathrm{const}$. Поэтому отображение $\mathbf{r} \to \mathbf{l}(\mathbf{r})$ эффективно представляет собой отображение двумерной сферы (диска со стянутой в точку границей) в двумерную сферу вектора $\mathbf{l}$, степень которого (число раз, которое образ диска покрывает сферу вектора $\mathbf{l}$) совпадает с указанным выше целым числом N. Распределение вектора $\mathbf{l}$ в линейном солитоне для $N = 1$ (так называемый 4π-вихрь) показано на рис.3.2a. Размер линейного солитона определяется конкуренцией дипольной и градиентной энергий и по порядку величины равен ξ_D.

Помимо линейных дефектов могут существовать и дефекты других размерностей, например плоские солитоны (доменные стенки). В ^{3}He-A по обе стороны доменной стенки параметр порядка принимает значения из пространства $\tilde{R}_A$, а в области стенки — из более широкого пространства R_A. Если рассмотреть отрезок, концы которого расположены по разные стороны стенки, то возникает его отображение в R_A, переводящее концы в $\tilde{R}_A$. Гомотопические классы таких отображений образуют *относительную гомотопическую группу размерности один* —



(a) (b)

Рис. 3.2. Распределение горизонтальной проекции вектора $\mathbf{l}$ (сплошная линия) (a) в 4π-вихре (вид сверху) и (b) плоском солитоне. Точки указывают концы векторов. Изображены случаи, когда вектор $\mathbf{l}$ вдали от вихря перпендикулярен оси вихря и когда вектор $\mathbf{l}$ внутри плоского солитона параллелен его плоскости (см. следующий раздел). Вектор $\mathbf{d}$ (пунктирная линия) постоянен в пространстве.

$\pi_1(R_A, \tilde{R}_A)$, которая в нашем случае равна Z_2, т.е. состоит из двух элементов. Один элемент соответствует отсутствию доменной стенки, а другой — стенке между двумя полупространствами, в одном из которых $\mathbf{d} = \mathbf{l}$, а в другом $\mathbf{d} = -\mathbf{l}$ [85] (рис.3.2b). Характерный размер плоского солитона, как и линейного, равен ξ_D.

Наряду с одномерными и двумерными солитонами естественно рассматривать нульмерные ("частицеподобные") солитоны — неоднородные распределения, такие, что параметр порядка принимает значения в более широком пространстве R_A в конечном объеме. Они описываются отображениями трехмерного шара D_3, охватывающего дефект в реальном пространстве, в R_A, при которых сфера — граница шара — отображается в $\tilde{R}_A$. Гомотопические классы таких отображений образуют *относительную гомотопическую группу размерности три* $\pi_3(R_A, \tilde{R}_A)$. Рассмотрим частицеподобные солитоны, для которых значение параметра порядка вдали от солитона постоянно. При этом граница шара D_3 отображается в точку, и эффективно мы получаем отбражение трехмерной сферы S^3 (шара с отождествленной в точку границей) в R_A. Соответствующие отображения образуют *гомотопическую группу* пространства R_A *размерности три* $\pi_3(R_A)$. Для простоты ограничимся рассмотрением орбитальных солитонов (т.е. будем полагать $\mathbf{d} = \mathrm{const}$). Тогда вместо R_A возникает пространство вырождения SO(3). Частицеподобный солитон описывается отображением $S^3 \to \mathrm{SO}(3)$. $\pi_3(\mathrm{SO}(3)) = Z$, и поэтому частицеподобные солитоны в ^{3}He-A (с размером, большим ξ_D — мы учитываем дипольную энергию) характеризуются целочисленным топологическим инвариантом N.

Каждое вращение из SO(3) можно задавать четырехмерным единичным вектором $\vec{\nu} = (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\cdot\mathbf{n})$, где $\mathbf{n}$ — ось поворота, а θ — угол поворота. Такая параметризация группы SO(3) двузначна: $\vec{\nu}$ и $-\vec{\nu}$ задают повороты вокруг одной и той же оси на углы, отличающиеся на 2π, т.е. один и тот же поворот. Вместо отображения $S^3 \to \mathrm{SO}(3)$ можно рассматривать отображение $S^3 \to S^3$ (определенное с точностью до смены знака $\vec{\nu}$) в трехмерную сферу векторов $\vec{\nu}$. Степень этого отображения (число раз, которое образ одной трехмерной сферы покрывает другую) совпадает с числом N и равна [19]

$$N = \frac{1}{12\pi^2}\int d\mathbf{r} e_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{ijk} \nu_\alpha \frac{\partial \nu_\beta}{\partial x_i}\frac{\partial \nu_\gamma}{\partial x_j}\frac{\partial \nu_\delta}{\partial x_k}. \qquad (3.4)$$

Кроме того, имеется стандартное отображение $\mathrm{SO}(3) \to S^2$, при котором каждой тройке $(\mathbf{\Delta}', \mathbf{\Delta}'', \mathbf{l})$ ставится в соответствие вектор $\mathbf{l}$. В результате возникает сквозное отображение $S^3 \to \mathrm{SO}(3) \to S^2 : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{l}(\mathbf{r})$. Такие отображения характеризуются элементами $\pi_3(S^2) = Z$, т.е. целочисленным инвариантом — инвариантом Хопфа [80]. Пользуясь методами теории гомотопий, несложно показать, что это то же самое целое число N.

Другое описание числа N можно получить так: рассмотрим замкнутую кривую $C_{\mathbf{l}_0}$ — множество точек $\mathbf{r}$, в которых $\mathbf{l}(\mathbf{r}) = \mathbf{l}_0$ (здесь и ниже мы считаем, что $\mathbf{l}_0$ находится в общем положении. При этом $C_{\mathbf{l}_0}$ состоит из одной или нескольких замкнутых несамопересекающихся петель). Коэффициент зацепления двух таких кривых для разных значений $\mathbf{l}_0$ ($\mathbf{l}_0 = \mathbf{a}$ и $\mathbf{l}_0 = \mathbf{b}$) совпадает с числом N. Под коэффициентом зацепления здесь имеется в виду число раз, которое одна кривая, $C_{\mathbf{a}}$, обвивает другую кривую, $C_{\mathbf{b}}$, т.е. число раз, которое $C_{\mathbf{a}}$ пересекает пленку, натянутую на $C_{\mathbf{b}}$ (рис.3.3). Если $C_{\mathbf{a}}$ и $C_{\mathbf{b}}$ состоят из нескольких кусков, то нужно сложить все попарные коэффициенты зацепления кусков $C_{\mathbf{a}}$ с кусками $C_{\mathbf{b}}$.

Сверхтекучая скорость в A-фазе определена соотношением

$$\mathbf{v}_s = \frac{\kappa}{2\pi}\Delta'_i \nabla \Delta''_i, \qquad (3.5)$$

где $\kappa = \pi\hbar/m$ — квант циркуляции в ^{3}He, из которого следует соотно-

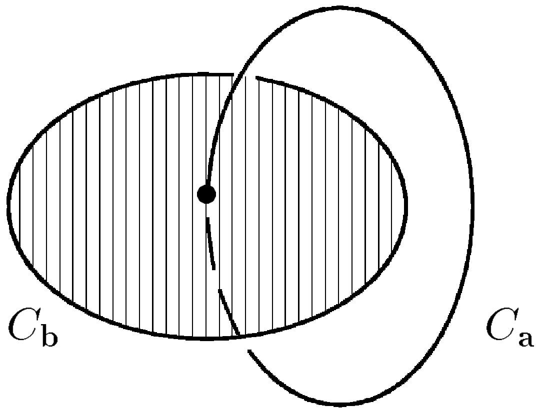


Рис. 3.3. Коэффициент зацепления контуров $C_{\mathbf{a}}$ и $C_{\mathbf{b}}$ равен 1.

шение Мермина-Хо [86]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_s = \frac{\kappa}{4\pi} e_{ijk} l_i \, \nabla l_j \times \nabla l_k. \tag{3.6}$$

Пользуясь им, можно переписать выражение для инварианта Хопфа N в виде [87]

$$N = \frac{1}{4\kappa^2} \int d\mathbf{r} \ \mathbf{v}_s \operatorname{rot} \mathbf{v}_s. \tag{3.7}$$

3.2. Пересечение линейного и плоского солитонов

Во вращающемся сосуде нормальная компонента жидкости совершает вращение вместе с сосудом, и как и в ^{4}He, минимизация энергии требует, чтобы сверхтекучая компонента тоже совершала подобное вращение, т.е. чтобы в среднем было выполнено условие

$$\langle \mathbf{v}_s \rangle = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}. \tag{3.8}$$

В гелии-II течение сверхтекучей компоненты потенциально, поэтому вращение приводит к образованию сингулярных вихрей с нормальным кором, в котором и сосредоточена завихренность. В ^{3}He-A могут образовываться и несингулярные вихри (линейные солитоны) с распределенной завихренностью [88]. Пользуясь соотношением Мермина-Хо (3.6), легко показать, что с каждым 4π-вихрем связаны два кванта циркуляции (отсюда и название вихря)

$$\oint \mathbf{v}_s d\mathbf{r} = \int\limits_S \operatorname{rot} \mathbf{v}_s d\mathbf{S} = 2\kappa \tag{3.9}$$

(во втором интеграле интегрирование ведется по сечению вихря). Поэтому концентрация вихрей определяется угловой скоростью вращения.

В недавнем эксперименте [20], выполненном в Хельсинки, было показано, что во вращающемся сосуде с ^{3}He-A могут существовать одновременно решетка несингулярных вихрей и плоский солитон. В этом эксперименте в покоящемся сосуде создавалась доменная стенка, перпендикулярная оси сосуда, после чего сосуд начинал вращаться. Оказалось, что при температурах $T \sim 0.5T_c$ доменная стенка продолжает существовать и во вращающемся сосуде, даже после появления вихревой решетки. Наблюдение структуры велось при помощи непрерывного ЯМР, и измеренная зависимость резонансных частот поглощения от угловой скорости вращения сосуда согласуется с предложенными теоретическими оценками.

Представляет интерес распределение параметра порядка в области пересечения вихря и солитона. В этой части мы дадим полное описание таких распределений с топологической точки зрения для различных угловых скоростей вращения сосуда [89].

Направим ось z вдоль угловой скорости сосуда. Эксперимент проводился во внешнем магнитном поле, параллельном z. Из-за анизотропии магнитной восприимчивости A-фазы дополнительная энергия в магнитном поле зависит от направления оси спиновой анизотропии $\mathbf{d}$:

$$\Delta F_H = \frac{1}{2} \Delta\chi \left(\mathbf{d} \cdot \mathbf{H}\right)^2 . \tag{3.10}$$

Минимум энергии достигается при $\mathbf{d} \perp \mathbf{H}$. Мы можем считать, что $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 = \mathrm{const}$. Это не отражается на топологической классификации, поскольку распределение вектора $\mathbf{d}$ в рассматриваемой системе топологически тривиально [20].

Как показано в предыдущем разделе, диполь-дипольное взаимодействие приводит к тому, что вне ко́ров особенностей (вихрей и доменной стенки) направление вектора $\mathbf{l}$ определяется вектором $\mathbf{d}$: $\mathbf{l} = \pm\mathbf{d}$. Доменная стенка расположена перпендикулярно внешнему магнитному полю и решетке вихрей, поэтому (вдали от вихрей) вектор $\mathbf{l}$ параллелен плоскости солитона и поворачивается на угол π при прохождении сквозь солитон (так называемый twist-солитон в поле вектора $\mathbf{l}$ [22]):

$$\mathbf{l}_{sol} = \mathbf{U}_z \mathbf{d}_0, \tag{3.11}$$

Рис. 3.4. Топология двух возможных структур пересечения вихря и плоского солитона (до удвоения). Кривые $C_\uparrow$ и $C_\downarrow$, в точках которых $\mathbf{l} = \pm\hat{z}$ соответственно, (a) не обвиваются и (b) обвиваются одна вокруг другой.

где $\mathbf{U}_z$ — матрица поворота на угол $\alpha(z)$, возрастающий от 0 до π при изменении z от $-\infty$ до $+\infty$.

В каждом горизонтальном сечении вихря вектор $\mathbf{l}$ заметает единичную сферу (рис.3.2a). Вот пример такого распределения:

$$\mathbf{l} = \mathbf{U}_z \left(\hat{y} \sin \eta(r) + \cos \eta(r) [\hat{x} \sin(\varphi - \varphi_0(z)) - \hat{z} \cos(\varphi - \varphi_0(z))] \right), \quad (3.12)$$

где r, φ — полярные координаты в плоскости xy; $\eta(r)$ изменяется от $\eta(0) = -\pi/2$ до $\eta(\infty) = \pi/2$, $\varphi_0(z)$ является функцией z, и мы положили $\mathbf{d}_0 = \hat{y}$.

Рассмотрим множества точек $C_\uparrow$ и $C_\downarrow$, в которых соответственно $\mathbf{l} = \pm\hat{z}$. В зависимости от вида функции $\varphi_0(z)$ кривые $C_\uparrow$ и $C_\downarrow$ обвиваются или не обвиваются одна вокруг другой (рис.3.4). Этому понятию обвивания можно придать точный топологический смысл, и его можно использовать при классификации топологически устойчивых распределений. В принципе, различие между двумя соотвествующими структурами может быть обнаружено экспериментально.

Чтобы получить периодические граничные условия вдоль оси z, мы "удвоим" плоский солитон [20]. Математически это означает следующее: функция $\mathbf{l}(\mathbf{r})$ в сосуде высоты h ($0 < z < h$), в котором расположен солитон, обладает тем свойством, что $\mathbf{l}(x, y, 0) = -\mathbf{l}(x, y, h)$ (в принципе, это верно для любого нечетного числа солитонов; для четного числа солитонов $\mathbf{l}(x, y, 0) = \mathbf{l}(x, y, h)$). Мы вместо нее рассмотрим функцию в вдвое более высоком сосуде ($0 < z < 2h$), доопределив $\mathbf{l}(\mathbf{r})$ формулой

$$\mathbf{l}(x, y, z + h) = -\mathbf{l}(x, y, z)$$

(для четного числа солитонов нужно взять знак плюс). Тогда $\mathbf{l}(x, y, 2h) = \mathbf{l}(x, y, 0)$.

Теперь окружим область пересечения вихря и удвоенного солитона бо́льшим цилиндром (рис.3.5). Если угловая скорость вращения сосуда мала, то мала концентрация вихрей, т.е. расстояние между вихрями велико по сравнению с их размерами. Тогда каждый отдельный вихрь хорошо определен, и мы можем считать, что на границе каждого горизонтального сечения цилиндра значение вектора $\mathbf{l}$ постоянно и реализует асимптотику вдали от вихря (постоянные граничные условия). В этом случае такое горизонтальное сечение вихря (с границей, отождествленной в точку) эффективно представляет из себя двумерную сферу S^2 (рис.3.5a), а весь объем цилиндра — прямое произведение этой сферы и окружности S^1, соответствующей вертикальному направлению (напомним, что граничные условия по оси z периодические). Кроме того, вдали от вихря направление $\mathbf{l}$ горизонтально (там должно реализовываться распределение, соответствующее плоскому солитону).

При увеличении угловой скорости вихри сближаются и перестают быть хорошо определенными, а вектор $\mathbf{l}$ начинает отклоняться от горизонтальной плоскости. Наконец, при бо́льших скоростях вращения расстояние между вихрями становится того же порядка, что и размер вихрей. В этих условиях вместо постоянных граничных условий в горизонтальном сечении нужно использовать периодические, соответствующие периодам решетки. Каждое горизонтальное сечение эффективно становится двумерным тором $S^1 \times S^1$, а весь объем сосуда — трехмерным тором $S^1 \times S^1 \times S^1$ (рис.3.5b).

Оценка величины угловой скорости, при которой расстояние между вихрями становится того же порядка, что и их размеры, основанная на предположении, что размер вихря равен ξ_D, дает значение порядка 100рад/с,что значительно превышает экспериментально достижимые на сегодняшний день значения (порядка нескольких радиан в секунду). Однако теоретические исследования структуры, минимизирующей свободную энергию решетки вихрей и плоского солитона, показывают, что

Рис. 3.5. (a) Мы окружаем область пересечения линейного и плоского солитонов цилиндром. Вдоль оси $\hat{z}$ наложены периодические граничные условия. На рисунке изображен случай $N = 1$, $m = 1$. C^* — произвольная вертикальная образующая боковой поверхности цилиндра. При малой плотности вихрей $\mathbf{l}$ постоянно на границе ∂D_2 каждого горизонтального сечения, и цилиндр эффективно становится $S^2 \times S^1$. (b) При большой плотности вихрей граничные условия на ∂D_2 периодические, и цилиндр превращается в $S^1 \times S^1 \times S^1$. Дополнительные инварианты m_1 и m_2 равны нулю.

вихри имеют заметно больший размер, и характерное значение угловой скорости снижается до величины, имеющей тот же порядок (радианы в секунду) [90].

Отметим, что из трех степеней свободы орбитальной части параметра порядка — тройки $(\mathbf{\Delta}', \mathbf{\Delta}'', \mathbf{l})$ — мы рассматриваем только две, связанные с $\mathbf{l}$. Это можно делать, поскольку периодические условия накладываются только на $\mathbf{l}$ [88]; в действительности, третья степень свободы не влияет на топологическую классификацию.

Приступим к классификации возможных структур.

3.2.1. Малые угловые скорости

При малых угловых скоростях вдали от кора вихря реализуется решение, отвечающее плоскому солитону, т.е. вектор $\mathbf{l}$ горизонтален и постоянен в каждом сечении. Цилиндр, окружающий вихрь, представляет собой прямое произведение $D_2 \times S^1$ двумерного диска D_2 на окружность S^1, соответствующую вертикальной образующей, а его отображение в сферу $S^2_{\mathbf{l}}$ вектора $\mathbf{l}$ переводит боковую поверхность цилиндра $\partial D_2 \times S^1$ в экваториальную окружность сферы $S^2_{\mathbf{l}}$. На языке топологии это означает, что нам нужно классифицировать отображения пар $(D_2 \times S^1; \partial D_2 \times S^1) \to (S^2; S^1)$. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда образ границы ∂D_2 (рис.3.5) горизонтального сечения цилиндра при отображении $\mathbf{l}(\mathbf{r})$ не наматывается на экватор. Этот случай реализуется как для постоянных $(S^2 \times S^1)$, так и для периодических $(S^1 \times S^1 \times S^1)$ граничных условий.

Такие отображения характеризуются тремя топологическими инвариантами:

1) числом N 4π-вихрей в цилиндре (т.е. в элементарной ячейке решетки):

$$N = \frac{1}{2\kappa} \oint_{\partial D_2} \mathbf{v}_s d\mathbf{r}, \tag{3.13}$$

где интегрирование ведется по границе любого сечения цилиндра. Для решетки обычных 4π-вихрей $N = 1$;

2) алгебраическим числом плоских солитонов до удвоения (т.е. числом солитонов с заданным направлением вращения вектора $\mathbf{l}$ внутри солитона (скажем, против часовой стрелки) за вычетом числа солитонов с противоположным направлением вращения). Это число показывает, сколько оборотов вокруг экватора совершает конец вектора $\mathbf{l}$ при движении по вертикальной образующей цилиндра. В ситуации с одним солитоном $m = 1$.

Кроме двух этих инвариантов, описывающих, по существу, отдельно вихри и плоские солитоны, имеется третий, характеризующий именно область их пересечения:

3) коэффициент k зацепления кривых $C_\uparrow$ и $C_\downarrow$.

Этот инвариант тесно связан с обсуждавшимся выше инвариантом Хопфа. И тот, и другой описывают локализованные дефекты — частицеподобные солитоны и пересечение вихря с доменной стенкой. Аналитическая формула для инварианта k представляет собой обобщение формулы (3.7) и содержит дополнительный интеграл:

$$k = \frac{1}{4\kappa^2} \int d\mathbf{r}\ \mathbf{v}_s \operatorname{rot} \mathbf{v}_s - \frac{N}{2\kappa} \oint\limits_{C^*} \mathbf{v}_s d\mathbf{r}, \tag{3.14}$$

где C^* — произвольная вертикальная образующая боковой поверхности цилиндра (рис.3.5). Если вихри отсутствуют ($N = 0$), то k совпадает с инвариантом Хопфа (3.7). Для случая $N = 1$ эта формула была предложена в работе [20] (инварианты k и m совпадают с введенными в этой работе).

3.2.2. Промежуточные угловые скорости

При увеличении угловой скорости вектор $\mathbf{l}$ отклоняется от горизонтали на границе ячейки решетки, т.е. в области между вихрями. Мы будем считать, что скорость вращения не слишком велика, и $\mathbf{l} \neq \pm\hat{z}$ на границе. Вместо постоянных граничных условий следует рассматривать периодические, однако мы рассмотрим также и случай постоянных граничных условий, который может быть интересен в других физических приложениях.

При постоянных граничных условиях ситуация с топологической точки зрения не отличается от исследованной в предыдущем подразделе, т.е. полным набором инвариантов является набор из чисел N, m, и k. Поскольку $\mathbf{l}$ на границе ячейки уже не лежит в экваториальной плоскости, в определении числа m нужно говорить о числе оборотов не самого вектора $\mathbf{l}$, а его горизонтальной проекции.

При периодических граничных условиях возникают два новых инварианта m_1 и m_2: числа оборотов горизонтальной проекции $\mathbf{l}$ при движении по двум образующим границы ∂D_2 элементарной ячейки вихревой решетки (на рисунке 3.5 $m_1 = m_2 = 0$).

Аналитическое выражение для инварианта k усложняется. Для его вывода нам потребуется понятие площади, окруженной замкнутым контуром C на $\mathbf{l}$-сфере. Проблема с определением этого понятия связана

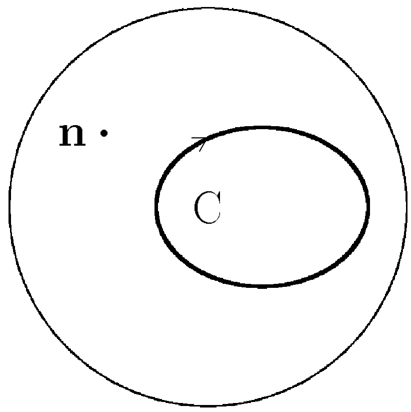


Рис. 3.6. Контур C делит сферу на две области. Площадь какой из них принять за площадь, ограниченную контуром?

с тем, что даже простейший контур (рис.3.6) делит сферу на две области, и неясно, площадь какой из них принять за площадь, ограниченную C. Однако можно выбрать вектор $\mathbf{n}$ на единичной сфере, не лежащий на контуре C, и определить площадь $\mathrm{Area}|_C^{\mathbf{n}}$ по отношению к этому вектору:

$$\mathrm{Area}|_C^{\mathbf{n}} = -\int\limits_C (1 + (\mathbf{l}\mathbf{n}))\,\frac{d\phi}{4\pi}, \tag{3.15}$$

где ϕ — азимутальный угол вращения вокруг $\mathbf{n}$ (начало его отсчета, разумеется, несущественно). Этот интеграл представляет собой площадь (с учетом ориентации), измеренную в единицах полной площади сферы, заметаемую дугой большого круга сферы, соединяющей точки $\mathbf{l}$ и $-\mathbf{n}$ и не проходящей через $\mathbf{n}$. На рисунке 3.6 это площадь части сферы, не содержащей $\mathbf{n}$. Несложно показать, что $\mathrm{Area}|_C^{\mathbf{n}}$ не меняется при движении вектора $\mathbf{n}$ по сфере до тех пор, пока он не пересекает контур C. В этот момент $\mathrm{Area}|_C^{\mathbf{n}}$ скачком меняется на целое число. Таким образом, дробная часть $\mathrm{Area}|_C^{\mathbf{n}}$ не зависит от выбора вектора $\mathbf{n}$. Мы будем обозначать ее $\mathrm{Area}|_C$. Во избежание недоразумений отметим, что для контуров C^* в реальном пространстве мы будем обозначать площадь $\mathrm{Area}|_{\mathbf{l}(C^*)}$, ограниченную его образом $\mathbf{l}(C^*)$ на $\mathbf{l}$-сфере, также символом $\mathrm{Area}|_{C^*}$.

При помощи этого понятия более общая формула для k (для случая промежуточных скоростей вращения) принимает вид:

$$k = \frac{1}{2\kappa}\oint\limits_{C_\uparrow} \mathbf{v} d\mathbf{r} - \frac{N}{2\kappa}\oint\limits_{C^*} \mathbf{v} d\mathbf{r} + N \mathrm{Area}|_{C^*}^{\downarrow}, \tag{3.16}$$

где $\downarrow$ обозначает точку южного полюса $\mathbf{l}$-сферы. Другое выражение для k получается взаимной заменой $\downarrow$ и $\uparrow$. В случае малых угловых скоростей вектор $\mathbf{l}$ лежит в плоскости xy на границе ячейки, и $\mathrm{Area}|_{C^*}^{\downarrow} = -\mathrm{Area}|_{C^*}^{\uparrow} = m/2$.

Отметим следующее соотношение для циркуляции сверхтекучей скорости по кривой $C_\mathbf{l}$, усредненное по $\mathbf{l}$-сфере:

$$\left\langle \oint\limits_{C_\mathbf{l}} \mathbf{v} d\mathbf{r} \right\rangle = \frac{1}{2\kappa}\int d\mathbf{r}\ \mathbf{v}_s \operatorname{rot} \mathbf{v}_s. \tag{3.17}$$

В случае, когда $\mathbf{l}$ горизонтален на границе ячейки, циркуляция вдоль $C_\mathbf{l}$ принимает всего два различных значения: одно для векторов северной полусферы, и другое для векторов южной полусферы. Поэтому полусумма выражения (3.16) и такого же, полученного заменой $\uparrow$ на $\downarrow$ и наоборот, с учетом (3.17) дает (3.14).

Можно получить выражение для k и через $\int d\mathbf{r}\ \mathbf{v}_s \operatorname{rot} \mathbf{v}_s$:

$$k = \frac{1}{4\kappa^2}\int d\mathbf{r}\ \mathbf{v}_s \operatorname{rot} \mathbf{v}_s - \frac{N}{\kappa}\oint\limits_{C^*} \mathbf{v} d\mathbf{r} + \frac{N}{2\kappa}\left\langle \oint\limits_{C^{**}} \mathbf{v} d\mathbf{r} \right\rangle + N\left(\mathrm{Area}|_{C^*}^{\downarrow} + \mathrm{Area}|_{C^*}^{\uparrow} \right). \tag{3.18}$$

В этой формуле C^* — фиксированная вертикальная образующая боковой поверхности цилиндра; C^{**} — произвольная такая образуюшая, и угловые скобки обозначают усреднение по всем таким образующим. Для вывода (3.18) существенно условие периодичности $\mathbf{v}_s - \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$ [88] (формула для общего случая, без использования этой периодичности, имеет более громоздкий вид).

3.2.3. Большие угловые скорости

Предположим теперь, что скорость вращения велика, и вектор $\mathbf{l}$ может принимать произвольные значения на боковой поверхности (в том числе и $\pm\hat{z}$). При этом теряют смысл введенные выше числа m, m_1, m_2 оборотов горизонтальной проекции $\mathbf{l}$, и требуется новая классификация дефектов. В зависимости от граничных условий требуется классифицировать отображения $S^2 \times S^1 \to S^2$ или $S^1 \times S^1 \times S^1 \to S^2$ (рис.3.5). Классификация таких отображений[4] была впервые произведена Л.С. Понтрягиным [83].

Отображение $S^2 \times S^1 \to S^2$ характеризуется целым числом N (степенью отображения горизонтального сечения цилиндра, или числом вихрей на элементарную ячейку) и, при заданном N, элементом Z_{2N}, т.е. целым вычетом по модулю $2N$. Этот последний инвариант I связан с рассмотренным ранее инвариантом k: для обсуждавшихся в предыдущих подразделах отображений

$$I = k + mN \pmod{2N}. \tag{3.19}$$

Это означает, что конфигурации с одинаковыми значениями N и $k + mN \pmod{2N}$ становятся топологически эквивалентными, если допустить произвольные значения вектора $\mathbf{l}$ на границе. Например, если при малой угловой скорости вращения существовала какая-то структура с инвариантами k, m, N, затем мы увеличили скорость вращения до достаточно большой величины и вновь уменьшили, то число вихрей на ячейку N не изменится, а инварианты k и m могут измениться. Однако вычет $k + mN \pmod{2N}$ сохранится.

В частности, для обычной вихревой решетки $N = 1$ и $I = k + m \pmod 2$, т.е. **имеется два типа конфигураций пересечения вихря и плоского солитона**. Например, конфигурации $m = k = 1$ и $m = 1$, $k = 0$, упомянутые в работе [20], остаются топологически неэквивалентными даже в пределе больших скоростей вращения (это верно и для периодических граничных условий, см. ниже).

В отсутствие вихревой решетки $N = 0$, и инвариант является просто целым числом k: частицеподобные солитоны в однородном поле вектора $\mathbf{l}$ ($m = 0$) или внутри доменной стенки ($m = 1$) характеризуются коэффициентом зацепления двух кривых $C_{\mathbf{a}}$ и $C_{\mathbf{b}}$ (см. раздел 3.1).

Фиксируем произвольный единичный вектор $\mathbf{l}_0$, такой, что $\mathbf{l} \neq \mathbf{l}_0$ на границе цилиндра (т.е., для постоянных граничных условий, на любой ее вертикальной образующей C^*). Аналитическое выражение для I имеет вид:

$$I = \frac{1}{2\kappa} \oint\limits_{C_{\mathbf{l}_0}} \mathbf{v} d\mathbf{r} - \frac{N}{2\kappa} \oint\limits_{C^*} \mathbf{v} d\mathbf{r} + N \mathrm{Area}\Big|_{C^*}^{\mathbf{l}_0} \pmod{2N}, \tag{3.20}$$

или, через $\int d\mathbf{r}\ \mathbf{v}_s \operatorname{rot} \mathbf{v}_s$:

$$I = \frac{1}{4\kappa^2} \int d\mathbf{r}\ \mathbf{v}_s \operatorname{rot} \mathbf{v}_s - \frac{N}{2\kappa} \oint\limits_{C^*} \mathbf{v} d\mathbf{r} + 2N \mathrm{Area}|_{C^*} \pmod{2N}. \tag{3.21}$$

[4]Точнее, отображений любого трехмерного клеточного комплекса в двумерную сферу S^2.

Отображения $S^1 \times S^1 \times S^1 \to S^2$ описываются в общем случае тремя целочисленными инвариантами N_1, N_2, N_3, которые показывают, сколько раз образ трех различных граней прямоугольного цилиндра (рис.3.5b) покрывает $\mathbf{l}$-сферу (степени отображения граней в сферу). При заданных N_1, N_2, N_3 имеется еще один инвариант: элемент $Z_{2\cdot \text{НОД}(N_1,N_2,N_3)}$, где НОД обозначает наибольший общий делитель.

Для случая вихревой решетки в силу периодичности $\mathbf{v}_s - \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$ из трех чисел N_i только одно, отвечающее горизонтальной грани и соответствующее числу вихрей на ячейку, отлично от нуля. Мы обозначим его, как и выше, $N = \text{НОД}(0,0,N)$. При этом формула для дополнительного инварианта принимает вид (ср. (3.18)):

$$I = \frac{1}{4\kappa^2} \int d\mathbf{r}\ \mathbf{v}_s \,\mathrm{rot}\, \mathbf{v}_s - \frac{N}{\kappa} \oint\limits_{C^*} \mathbf{v} d\mathbf{r} + \frac{N}{2\kappa} \left\langle \oint\limits_{C^{**}} \mathbf{v} d\mathbf{r} \right\rangle + 2N \mathrm{Area}|_{C^*} \pmod{2N}. \tag{3.22}$$

Заключение

Основные результаты, полученные в диссертации, таковы:

1.Дан микроскопический вывод вклада внешнего электрического поля в энергию сверхтекучей ферми-жидкости с p-спариванием. Этот вклад приводит к влиянию внешнего электрического поля на протекание спинового тока. Получены выражения для тока в электрическом поле. В частности, исследовано влияние электрического поля на протекание спинового тока между сосудами с однородно прецессирующей намагниченностью.

2.Электрическое поле может быть использовано для возбуждения второго звука в ^{3}He-A_1. Вычислена амплитуда возникающих волн. Показано, что использование резонансной методики приводит к значительному усилению колебаний, и исследована возможность экспериментального наблюдения эффекта.

3.Получены уравнения спиновой динамики сверхтекучей ферми-жидкости в неоднородном случае за пределами гидродинамического приближения, являющиеся обобщением уравнений Леггетта для нормальной жидкости и уравнений Леггетта-Такаги для сверхтекучей жидкости. Путем выделения наиболее существенных членов вблизи температуры перехода получены приближенные уравнения, которые могут быть использованы для аналитического и численного исследования динамических явлений в спиновой системе ^{3}He.

4.Найдена гамильтонова структура уравнений спиновой динамики нормальной ферми-жидкости. Приведен вывод уравнений спиновой динамики сверхтекучей жидкости вблизи перехода на основе гамильтонова формализма.

5.Найдено решение уравнений, описывающее новую когерентно прецессирующую двухдоменную спиновую структуру, существующую вблизи температуры перехода T_c. В одном из доменов намагниченность направлена вдоль магнитного поля, а в другом — в противоположном направлении. Описана релаксация структуры и область ее существования. Показано, что вблизи T_c существенную роль играет ферми-жидкостный вклад в спиновый ток, а при низких температурах — сверхтекучий ток, что приводит к образованию различных прецессирующих структур.

6.Получена полная топологическая классификация возможных типов пересечения плоского солитона с решеткой несингулярных вихрей в A-фазе при различных угловых скоростях вращения. Приведены аналитические выражения для дополнительного топологического инварианта, обобщающего инвариант Хопфа. Показано, в частности, что в случае решетки обычных 4π-вихрей даже в пределе больших угловых скоростей вращения существует два вида топологически различных дефектов.

Диссертация выполнена в Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау, и я благодарен сотрудникам и аспирантам института за интерес к работе и доброжелательную критику.

Я признателен своему научному руководителю В.П. Минееву за постоянный интерес и поддержку работы и многочисленные дискуссии. Мне также приятно выразить благодарность ученым, с которыми я неоднократно обсуждал вопросы, связанные с этой работой, особенно Г.Е. Воловику, В.В. Дмитриеву, Л.С. Левитову, Т.Ш. Мисирпашаеву, С.П. Новикову, И.А. Фомину.

Работа проводилась при частичной финансовой поддержке Forschungszentrum, Jülich, GmbH в рамках программы Landau Scholarship (1992–1995), а также Международного Научного Фонда, грант №MGI000, и Международного Научного Фонда и Правительства России, грант №MGI300 (1994–1995).

Литература

[1] P.L. Kapitza, *Nature*, **141**, 174 (1938)

[2] J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer, *Phys. Rev.*, **108**, 1175 (1957)

[3] Л.П. Питаевский, *ЖЭТФ*, **37**, 1794 (1959) [*Sov. Phys. JETP*, **10**, 1267 (1960)]

[4] D.D. Osheroff, R.C. Richardson, D.M. Lee, *Phys. Rev. Lett.*, **28**, 885 (1972)

[5] А.С. Боровик-Романов, Ю.М. Буньков, В.В. Дмитриев, Ю.М. Мухарский, К. Флахбарт, *ЖЭТФ*, **88**, 2025 (1985) [*Sov. Phys. JETP*, **61**, 1199 (1985)]

[6] И.А. Фомин, *ЖЭТФ*, **88**, 2039 (1985) [*Sov. Phys. JETP*, **61**, 1207 (1985)]

[7] Yu.M. Bunkov, O.D. Timofeevskaya, G.E. Volovik, *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 1817 (1994)

[8] И.А. Фомин, *ЖЭТФ*, **94**, 112 (1988) [*Sov. Phys. JETP*, **67**, 1148 (1988)]

[9] А.С. Боровик-Романов, Ю.М. Буньков, А. де Ваард, В.В. Дмитриев, В. Макроциева, Ю.М. Мухарский, Д.А. Сергацков, *Письма в ЖЭТФ*, **47**, 400 (1988) [*JETP Lett.*, **47**, 478 (1988)]

[10] И.А. Фомин, *Письма в ЖЭТФ*, **45**, 106 (1987) [*JETP Lett.*, **45**, 135 (1987)]

[11] A.S. Borovik-Romanov, Yu.M. Bunkov, V.V. Dmitriev, Yu.M. Mukharsky, D.A. Sergatskov, *Proc. of Symp. on Quantum Fluids and Solids*, AIP CONF. PROC. 194 / Eds. G.Ihas, Y.Takaho, N.Y., 1989. P.27

[12] V.P. Mineev, G.E. Volovik, *J. Low Temp. Phys.* **89**, 823 (1992)

[13] В.В. Дмитриев, И.А. Фомин, *Письма в ЖЭТФ*, **59**, 352 (1994)

[14] В.В. Дмитриев, С.Р. Заказов, В.В. Мороз, в печати

[15] В.В. Дмитриев, частное сообщение

[16] A.J. Leggett, *J.Phys.*, **C3**, 448 (1970)

[17] A.J. Leggett, *Ann. Phys. (NY)*, **85**, 11 (1974)

[18] A.J. Leggett, S. Takagi, *Ann. Phys.*, **106**, 79 (1977)

[19] V.P. Mineev, *Sov. Sci. Rev.*, **A2** edited by I.M. Khalatnikov, GmbH, Chur, Switzerland: Harwood Acad. Publ., 173 (1980)

[20] V.M.H. Ruutu, Ü. Parts, J.H. Koivuniemi, M. Krusius, E.V. Thuneberg and G.E. Volovik, *Письма в ЖЭТФ*, **60**, 659 (1994)

[21] A.J. Leggett, *Rev. Mod. Phys.*, **47**, 331 (1975)

[22] D. Vollhardt, P. Wölfle. *The Superfluid Phases of Helium 3.* Taylor & Francis, London-New York-Philadelphia, 1990.

[23] V.P. Mineev, Yu.G. Makhlin, *ЖЭТФ*, **102**, 876 (1992) [Sov. Phys. JETP **75**, 479 (1992)]

[24] Yu.G. Makhlin, *Journal of Low Temp. Phys.*, **95**, 497 (1994)

[25] D.S. Greywall, *Phys. Rev.*, **B33**, 7520 (1986)

[26] L.R. Corruccini, D.D. Osheroff, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 2029 (1980)

[27] N.D. Mermin, V. Ambegaokar, *Proc. 24th Nobel Symp. 1973* (Academic Press, New York – London, 1974), p.97 [перевод в сборнике *Сверхтекучесть гелия-3.* М: "Мир", 1977, стр. 93]

[28] P.W. Anderson, P. Morel, *Phys. Rev.*, **123**, 1911 (1961)

[29] P.W. Anderson, W.F. Brinkman, *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 11083) (197

[30] R. Balian, N.R. Werthamer, *Phys. Rev.*, **131**, 1553 (1963)

[31] Я.А. Вдовин. В книге: *Приложение методов квантовой теории поля к задаче многих тел*, ред. А.И. Алексеева. М: "Госатомиздат", стр. 194, 1963

[32] A.J. Leggett, *Prog. Theor. Phys.*, **51**, 1275 (1974)

[33] С.П. Новиков, *Функциональный анализ и его приложения*, **15**, 37 (1981)

[34] И.А. Фомин, *ЖЭТФ*, **84**, 2109 (1983) [*Sov. Phys. JETP*, **57**, 1227 (1983)]

[35] А.С. Боровик-Романов, Ю.М. Буньков, В.В. Дмитриев, Ю.М. Мухарский, *Письма в ЖЭТФ*, **45**, 98 (1987) [*JETP Lett.*, **45**, 124 (1987)]

[36] A.S. Borovik-Romanov, Yu.M. Bunkov, V.V. Dmitriev, Yu.M. Mukharskiy, D.A. Sergatskov, *Phys. Rev. Lett.*, **62**, 1631 (1989)

[37] J.M. Delrieu, *J.Phys. (Paris) Lett.* **35**, L-189 (1974) и **36**, L-22(E) (1975).

[38] G.W. Swift, J.P. Eisenstein, R.E. Packard, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 1955 (1980)

[39] I.A. Fomin, C.J. Pethick, J.W. Serene, *Phys. Rev. Lett.*, **40**, 1144 (1978)

[40] Г.Е. Воловик , *Письма в ЖЭТФ*, **39**, 169 (1984) [*JETP Lett.*, **39**, 200 (1984)]

[41] А.С. Боровик-Романов, Ю.М. Буньков, В.В. Дмитриев, Ю.М. Мухарский, Е.В. Поддьякова, О.Д. Тимофеевская, *ЖЭТФ*, **96**, 1100 (1989)

[42] В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. *Квантовая электродинамика.* М:“Наука”, 1989

[43] В.П. Минеев, *ЖЭТФ*, **90**, 1236 (1986)

[44] А.В. Балацкий, В.П. Минеев, *ЖЭТФ*, **89**, 2073 (1985)

[45] А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский. *Методы квантовой теории поля в статистической физике.* М: ГИФМЛ, 1962

[46] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Статистическая физика. Часть 2. Теория конденсированного состояния.* М: “Наука”, 1978

[47] M.C. Cross, *J. Low Temp. Phys.*, **21**, 525 (1975)

[48] M.C. Cross. *A dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy at the University of Cambridge* (1975)

[49] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. *Современная геометрия. Методы и приложения.* М:"Наука", 1986

[50] И.А. Фомин, *ЖЭТФ*, **93**, 2002 (1987) [*Sov. Phys. JETP*, **66**, 1142 (1987)]

[51] A.V. Balatsky, B.L. Altshuler, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1678 (1993)

[52] Y. Aharonov, A. Casher, *Phys. Rev. Lett.*, **53**, 319 (1984)

[53] M. Liu, *Physica*, **109/110B+C**, 1615 (1982) (*Proceedings of the 16th International Conference on Low Temperature Physics*, LT-16)

[54] M. Liu, *Phys. Rev. Lett.*, **43**, 1740 (1979)

[55] M. Liu, *Z. Phys.*, **B40**, 175 (1980)

[56] Г.Е. Гургенишвили, Г.А. Харадзе, *Письма в ЖЭТФ*, **31**, 593 (1980) [*JETP Lett.*, **31**, 557 (1980)]

[57] И.М. Халатников. *Теория сверхтекучести.* М: "Наука", 1971

[58] M.C. Cross, P.W. Anderson, *Proceedings of the 14th International Conference on Low Temperature Physics*, Part I, ed. M. Krusius, M. Vuorio (North-Holland, Amsterdam), p.29 (1975)

[59] J.C. Wheatley, *Rev. Mod. Phys.*, **47**, 415 (1975)

[60] S.T. Lu, H. Kojima, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1677 (1985)

[61] В.П. Пешков, *ЖЭТФ*, **18**, 867 (1948)

[62] R.A. Sherlock, D.O. Edwards, *Rev. Sci. Instr.*, **41**, 1603 (1970) [*Приборы для научных исследований*, **41**, 75 (1970)]

[63] M. Liu, *Phys. Rev.* **B29**, 2833 (1984)

[64] M. Liu, M.R. Stern, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1842 (1982)

[65] G. Nunes, Jr., C. Jin, D.L. Hawthorne A.M. Putnam, D.M. Lee, *Phys. Rev.*, **B46**, 9082 (1992)

[66] I.A. Fomin, *Physica B*, **210** (1995), в печати

[67] Ю.Г. Махлин, В.П. Минеев, *ЖЭТФ*, **108**, №11 (1995)

[68] А.Ф. Андреев, И.М. Халатников, *ЖЭТФ*, **44**, 2058 (1963) [*Sov. Phys. JETP*, **17**, 1384 (1963)]

[69] O. Betbeder-Matibet, P. Nozières, *Ann. Phys. (N.Y.)*, **51**, 932 (1969)

[70] P. Wölfle, *Phys. Rev. Lett.*, **31**, 1437 (1973)

[71] R. Combescot, *Phys.Rev.*, **B13**, 126, (1976); там же, **A10**, 1700 (1974)

[72] В.И. Арнольд. *Математические методы классической механики.* М: "Наука", 1974

[73] W.P. Brinkman, H. Smith, *Phys. Lett.*, **53A**, 43 (1975)

[74] J.S. Korhonen, G.E. Volovik, *Письма в ЖЭТФ*, **55**, 358 (1992) [*JETP Lett.*, **55**, 362 (1992)]

[75] Yu.M. Bunkov, G.E. Volovik, *ЖЭТФ*, **103**, 1619 (1993)

[76] Yu.M. Bunkov, S.N. Fisher, A.M. Guénault, G.R. Pickett, *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 3092 (1992); Yu.M. Bunkov, S.R. Zakazov, в печати

[77] R. Combescot, H. Ebisawa, *Phys. Rev. Lett.*, **33**, 810 (1974)

[78] P. Bhattacharyya, C.J. Pethick, H. Smith, *Phys. Rev.*, **B15**, 3367 (1977)

[79] P. Bhattacharyya, C.J. Pethick, H. Smith, *Phys. Rev. Lett.*, **35**, 473 (1975)

[80] А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс. *Курс гомотопической топологии.* М: "Наука", 1989

[81] L. Michel, *Rev. Mod. Phys.*, **52**, 617 (1980)

[82] A.T. Garel, *J. Phys.* (Paris), **39**, 225 (1978)

[83] L.S. Pontrjagin, *Mat. Sbornik (Recueil Mathématique N.S.)*, **9**(51), 331 (1941)

[84] Г.Е. Воловик, В.П. Минеев, *ЖЭТФ*, **72**, 2256 (1977)

[85] V.P. Mineev, G.E. Volovik, *Phys. Rev.*, **B18**, 3197 (1978)

[86] N. Mermin, T.-L. Ho, *Phys. Rev. Lett.*, **36**, 594 (1976)

[87] Г.Е. Воловик, В.П. Минеев, *ЖЭТФ*, **73**, 767 (1977)

[88] G.E. Volovik, N.B. Kopnin, *Письма в ЖЭТФ*, **25**, 26 (1977) [*JETP Lett.*, **25**, 22 (1977)]

[89] Yu.G. Makhlin, T.Sh. Misirpashaev, *Письма в ЖЭТФ*, **61**, 48 (1995)

[90] Г.Е. Воловик, частное сообщение