Вопрос 1. При каком значении щели Δ в сверхпроводнике состояния островка с нечётным зарядом не играют роли при нулевой температуре?

Вопрос 2. Оценить время сбоя фазы из-за продольного гауссова шума.

Задача 1 (квантовое измерение) Для реализации квантового измерения зарядового квантового бита рядом с ним расположен квантовый точечный контакт.

Из-за взаимодействия кубита и контакта (см. описание в материалах лекции) ток в контакте зависит от заряда на грануле кубита, что позволяет по величине тока судить о квантовом зарядовом состоянии. При этом ток течет путем туннелирования электронов через контакт, к которому приложено напряжение. Дробовой шум тока действует на кубит в ходе измерения и разрушает его фазовую когерентность (на каком-то масштабе времени T_2). Покажите, что измерение невозможно без разрушения квантового состояния — что время, требуемое для считывания состояния кубита, не меньше, чем время разрушения квантовой когерентности.

а) Будем описывать состояние контакта числом n прошедших через него электронов (опуская пока подробности о состояниях электронов в электродах). Тогда в.ф. кубита+контакта может быть записана в виде $|0\rangle\,\psi_0+|1\rangle\,\psi_1$, где $\psi_i=\sum_n \psi_i^n\,|n\rangle$, $i=0,1$. Как выглядят ψ_0 и ψ_1 в момент начала измерения $t=0$, когда подается напряжение, и протуннелировало 0 электронов? Выразить распределение прошедшего заряда $P(n,t)$ через $\psi_i(n,t)$.

б) Пусть для состояния 0 кубита туннелирование каждого следующего электрона происходит с вероятностью Γ_0 в единицу времени. Как выглядит соответствующее распределение $P_0(n,t)$ числа прошедших электронов за время t? Тот же вопрос для Γ_1 и $P_1(n,t)$. А как через $P_0(n,t)$ и $P_1(n,t)$ выражается распределение $P(n,t)$ для начального состояния $a\,|0\rangle+b\,|1\rangle$?

в) Оцените время, через которое $P_0(n)$ и $P_1(n)$ перестанут заметно перекрываться, и измерение прошедшего заряда n даст информацию о состоянии кубита.

г) Используя перекрытие $\psi_0(n)$ и $\psi_1(n)$ найдите недиагональный элемент матрицы плотности кубита ρ_{01}. Покажите, что он затухает (разрушение когерентности). Аргументируйте, почему это время затухания не дольше времени измерения, найденного в в).

Попробуйте сформулировать и доказать утверждение, что «точность» измерения за время t ограничена величиной распадающегося матричного элемента ρ_{01}.

Задача 1а (измерение и модель Калдейры-Леггетта). Опишем квантовое измерение, рассмотрев в качестве детектора резервуар осцилляторов — спин-бозонную модель (вариант модели Калдейры-Леггетта).

Пусть система описывается гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2}(\Delta E + \hat{X})\sigma_z + H_{\text{bath}}\,, \tag{1}$$

где

$$\hat{X} = \sum_n \lambda_n x_n \tag{2}$$

и

$$H_{\text{bath}} = \sum_n \left[\frac{m_n \omega_n^2 x_n^2}{2} + \frac{p_n^2}{2m_n}\right]. \tag{3}$$

а) Найдите закон затухания во времени недиагональной компоненты матрицы плотности кубита. Выразите его через спектральную плотность резервуара $J(\omega) = \frac{\pi}{2}\sum_n \frac{\hbar\lambda^2}{m_n\omega_n}\delta(\omega - \omega_n)$.

б) Обсудите эволюцию распределения показания «стрелки детектора» $P(X)$: найдите эволюцию среднего значения $\langle X(t)\rangle$ и дисперсию $\langle X^2(t)\rangle$. При каком условии на достаточно длинных временах резервуар будет играть роль детектора, так что по значению X можно будет судить о состоянии кубита?