Задача 1 (квантовое измерение) Для реализации квантового измерения зарядового квантового бита рядом с ним расположен квантовый точечный контакт.

Из-за взаимодействия кубита и контакта (см. описание в материалах лекции) ток в контакте зависит от заряда на грануле кубита, что позволяет по величине тока судить о квантовом зарядовом состоянии. При этом ток течет путем туннелирования электронов через контакт, к которому приложено напряжение. Дробовой шум тока действует на кубит в ходе измерения и разрушает его фазовую когерентность (на каком-то масштабе времени T_2). Покажите, что измерение невозможно без разрушения квантового состояния — что время, требуемое для считывания состояния кубита, не меньше, чем время разрушения квантовой когерентности.

а) Будем описывать состояние контакта числом прошедших через него электронов (опуская пока подробности о состояниях электронов в электродах). Тогда в.ф. кубита+контакта может быть записана в виде $|0\rangle\,\psi_0+|1\rangle\,\psi_1$, где $\psi_{0/1}=\sum_n \psi_{0/1}^n\,|n\rangle$. Как выглядят ψ_0 и ψ_1 в момент начала измерения $t=0$, когда подается напряжение, и протуннелировало 0 электронов? Выразить распределение прошедшего заряда $P(n)$ через $\psi_{0/1}(n)$.

б) Пусть для состояния 0 кубита туннелирование каждого следующего электрона происходит с вероятностью Γ_0 в единицу времени. Как выглядит соответствующее распределение $P_0(n,t)$ числа прошедших электронов за время t? Тот же вопрос для Γ_1 и $P_1(n,t)$. А как выглядит распределение $P(n,t)$ для начального состояния $a\,|0\rangle+b\,|1\rangle$?

в) Оцените время, через которое $P_0(n)$ и $P_1(n)$ перестанут заметно перекрываться, и измерение прошедшего заряда n даст информацию о состоянии кубита.

г) Используя перекрытие $\psi_0(n)$ и $\psi_1(n)$ найдите недиагональный элемент матрицы плотности кубита ρ_{01}. Покажите, что он затухает (разрушение когерентности). Аргументируйте, почему это время затухания не дольше времени измерения, найденного в в).

Попробуйте сформулировать и доказать утверждение, что «точность» измерения за время t ограничена величиной распадающегося матричного элемента ρ_{01}.

Задача 1а (измерение и модель Калдейры-Леггетта). Опишем квантовое измерение, рассмотрев в качестве детектора резервуар осцилляторов — спин-бозонную модель (вариант модели Калдейры-Леггетта). Пусть система описывается гамильтонианом

$$H=-\frac{1}{2}(\Delta E+\hat{X})\sigma_z+H_{\text{bath}}\,, \tag{1}$$

где

$$\hat{X} = \sum_n \lambda_n x_n \tag{2}$$

и

$$H_{\rm bath} = \sum_n \left[\frac{m_n \omega_n^2 x_n^2}{2} + \frac{p_n^2}{2m_n} \right] . \tag{3}$$

а) Найдите закон затухания во времени недиагональной компоненты матрицы плотности кубита. Выразите его через спектральную плотность резервуара $J(\omega)$.

б) Обсудите эволюцию распределения показания «стрелки детектора» $P(X)$. Найдите эволюцию среднего значения $\langle X(t) \rangle$ и дисперсию $\langle X^2(t) \rangle$. При каком условии на достаточно длинных временах резервуар будет играть роль детектора, так что по значению X можно будет судить о состоянии кубита?

Задача 2 (цепочка Китаева). Рассмотрим фермионы на решетке с гамильтонианом:

$$\mathcal{H} = -\mu \sum_x c_x^\dagger c_x - \sum_x \left[t c_x^\dagger c_{x+1} + \Delta c_x c_{x+1} + \text{э.с.} \right] ,$$

где μ и t вещественны, а Δ комплексно, x пробегает целые значения.
а) Диагонализовать гамильтонина и найти спектр возбуждений $E(k)$ в (одномерном) объеме. При каких значениях параметров $E(k)$ зануляется?
Указание. Определим $\Psi_x \equiv (c_x, c_x^\dagger)$. Записать гамильтониан в виде $\sum_{x,x'} \Psi_x^\dagger \hat{H}_{x-x'} \Psi_{x'}$, где H - матрица 2×2. Используя преобразование Фурье, найти $H(k)$ и спектр $E(k)$.
б) При каких значениях параметров существуют нулевые краевые моды - операторы вида $\sum_x f(x) c_x$, коммутирующие с гамильтонианом? ($f(x)$, локализованную вблизи края, удобно искать в виде суперпозиции спадающих экспонент.) В частности, существуют ли они при $t = \Delta = 0$? А при $\mu = 0$?
(A.Kitaev, arXiv:cond-mat/0010440)

Задача 3 (классификация топологических изоляторов). Рассмотрим системы на одномерной решетке с зонным гамильтонианом $H(k) = -\mathbf{B}(k)\hat{\vec{\sigma}}$ размером 2×2, определенным в зоне Бриллюэна $-\pi < k < \pi$ и не имеющим нулевых собственных значений (гамильтониан с щелью; $\vec{\sigma}$ — матрицы Паули). Если непрерывно менять зависимость $\mathbf{B}(k)$, один такой гамильтониан преобразуется в другой. Всегда ли можно один $H_1(k)$ преобразовать в другой, $H_2(k)$? Сколько существует различных типов гамильтонианов? Ответ зависит от симметрии рассматриваемых гамильтонианов.
а) Решить задачу, когда никаких дополнительных ограничений (кроме эрмитовости, $H^\dagger(k) = H(k)$) на форму операторов нет. Показать, что все $H(k)$ эквивалентны.
б) Рассмотреть случай частично-дырочной симметрии: $H(-k) = -\sigma_x H^T(k) \sigma_x$.

Показать, что при этом $H(k)$ имеет вид

$$H(k) = \begin{pmatrix} \xi & \Delta \\ \Delta^* & -\xi \end{pmatrix} , \tag{4}$$

где $\xi(k)$ - четная вещественная функция, а "сверхпроводящая щель" $\Delta(k)$ - нечетная комплексная. Показать, что существуют два класса гамильтонианов, не эквивалентных между собой.
в) Как соотносятся области параметров, полученные в задачах 2б) и 3б)?